

Серия 9. Раскраски и немного стереометрии

1. В стране 100 городов. Каждые два города соединены прямым рейсом одной из двух авиакомпаний: синей или зеленой. Для любых четырех городов оказалось, что среди всех рейсов между ними ровно три рейса выполняются самолетами синей авиакомпании. Докажите, что всего рейсов синей авиакомпании столько же, сколько рейсов зеленой авиакомпании.

2. В группе 20 студентов. Среди них есть студент, имеющий в группе одного друга, студент, имеющий двух друзей, ..., студент, имеющий в группе 14 друзей. Докажите, что найдутся трое студентов, любые двое из которых дружат.

3. Пусть G — граф с $2n+1$ вершинами и более, чем $n\Delta(G)$ ребрами. Докажите, что $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

4. Докажите, что любой выпуклый многогранник имеет либо вершину степени 3, либо грань-треугольник. (Выпуклый многогранник — трёхсвязный граф без петель и кратных рёбер, который можно изобразить на сфере без пересечений рёбер.)

5. Многогранник называется *правильным*, если он выпуклый, в каждой вершине сходится одно и то же число рёбер, а его грани — одинаковые правильные многоугольники.

а) Пусть у правильного многогранника в каждой вершине сходится k рёбер, а грань — это s -угольник. Докажите, что $(k-2)(s-2) < 4$.

б) Перечислите все правильные многогранники и докажите, что других нет.

6. Пусть G — двудольный граф

а) Докажите, что G имеет регулярный двудольный надграф степени $\Delta(G)$ (добавлять можно как вершины, так и рёбра).

б) Докажите, что $\chi'(G) = \Delta(G)$ с помощью пункта а и теорем о паросочетаниях.

7. Докажите, что для любого графа G существует такой двудольный подграф G' , что:

а) $e(G') \geq \frac{e(G)}{2}$;

б) $d_{G'}(x) \geq \frac{d_G(x)}{2}$ для любой вершины $x \in V(G)$.