

## Серия 8. Раскраски

1. На новогодний праздник пришли 99 детей. В гардеробе каждый из них обругал кого-то из остальных, причём никто не был обруган дважды. Когда Дед Мороз предложил всем загадать по два желания, первым желанием каждого ребенка было получить мороженое, а вторым — чтобы его обидчик не получил мороженое. Докажите, что у кого-то из детей сбудется ровно одно из загаданных желаний.

2. а) Пусть  $T$  — дерево,  $v(T) = n$ . Найдите  $\chi_T(k)$  (то есть, количество способов раскрасить  $T$  в  $k$  цветов).

б) Пусть  $G$  — граф с  $\chi_G = \chi_T$ . Докажите, что  $G$  — дерево с  $n$  вершинами.

3.  $G$  — граф с  $v(G) = n$  и  $e(G) = m$ , а  $\chi_G(k) = k^n - a \cdot k^{n-1} + \dots$ . Найдите коэффициент  $a$  (выразите через данные числа).

4. В регулярном графе  $G$  степени  $d$  нечетное число вершин. Докажите, что  $\chi'(G) = d + 1$ .

5. В графе  $G$  любые два нечетных цикла имеют общую вершину. Докажите, что  $\chi(G) \leq 5$ .

6. Дан граф  $G$  с  $e(G) > nv(G)$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Докажите, что этот граф не является  $(n+1)$ -редуцируемым.

7. Дан граф, степени всех вершин которого равны 4. Его вершины покрашены в три цвета. Докажите, что есть цикл, вершины которого покрашены не более, чем в два цвета.

---

## Серия 8. Раскраски

1. На новогодний праздник пришли 99 детей. В гардеробе каждый из них обругал кого-то из остальных, причём никто не был обруган дважды. Когда Дед Мороз предложил всем загадать по два желания, первым желанием каждого ребенка было получить мороженое, а вторым — чтобы его обидчик не получил мороженое. Докажите, что у кого-то из детей сбудется ровно одно из загаданных желаний.

2. а) Пусть  $T$  — дерево,  $v(T) = n$ . Найдите  $\chi_T(k)$  (то есть, количество способов раскрасить  $T$  в  $k$  цветов).

б) Пусть  $G$  — граф с  $\chi_G = \chi_T$ . Докажите, что  $G$  — дерево с  $n$  вершинами.

3.  $G$  — граф с  $v(G) = n$  и  $e(G) = m$ , а  $\chi_G(k) = k^n - a \cdot k^{n-1} + \dots$ . Найдите коэффициент  $a$  (выразите через данные числа).

4. В регулярном графе  $G$  степени  $d$  нечетное число вершин. Докажите, что  $\chi'(G) = d + 1$ .

5. В графе  $G$  любые два нечетных цикла имеют общую вершину. Докажите, что  $\chi(G) \leq 5$ .

6. Дан граф  $G$  с  $e(G) > nv(G)$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Докажите, что этот граф не является  $(n+1)$ -редуцируемым.

7. Дан граф, степени всех вершин которого равны 4. Его вершины покрашены в три цвета. Докажите, что есть цикл, вершины которого покрашены не более, чем в два цвета.

---

## Серия 8. Раскраски

1. На новогодний праздник пришли 99 детей. В гардеробе каждый из них обругал кого-то из остальных, причём никто не был обруган дважды. Когда Дед Мороз предложил всем загадать по два желания, первым желанием каждого ребенка было получить мороженое, а вторым — чтобы его обидчик не получил мороженое. Докажите, что у кого-то из детей сбудется ровно одно из загаданных желаний.

2. а) Пусть  $T$  — дерево,  $v(T) = n$ . Найдите  $\chi_T(k)$  (то есть, количество способов раскрасить  $T$  в  $k$  цветов).

б) Пусть  $G$  — граф с  $\chi_G = \chi_T$ . Докажите, что  $G$  — дерево с  $n$  вершинами.

3.  $G$  — граф с  $v(G) = n$  и  $e(G) = m$ , а  $\chi_G(k) = k^n - a \cdot k^{n-1} + \dots$ . Найдите коэффициент  $a$  (выразите через данные числа).

4. В регулярном графе  $G$  степени  $d$  нечетное число вершин. Докажите, что  $\chi'(G) = d + 1$ .

5. В графе  $G$  любые два нечетных цикла имеют общую вершину. Докажите, что  $\chi(G) \leq 5$ .

6. Дан граф  $G$  с  $e(G) > nv(G)$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Докажите, что этот граф не является  $(n+1)$ -редуцируемым.

7. Дан граф, степени всех вершин которого равны 4. Его вершины покрашены в три цвета. Докажите, что есть цикл, вершины которого покрашены не более, чем в два цвета.