Серия 7. Теорема Менгера и разное

1. На вечеринке гость считается застенчивым, если у него не более трех знакомых. Оказалось, что у каждого гостя не менее трех застенчивых знакомых. Докажите, что все гости — застенчивые.

2. В королевстве живут рыцари. Любые два из них либо враждуют (и такие среди них есть!), либо дружат, либо друг к другу безразличны. Друг врага рыцаря — враг этого рыцаря. Докажите, что хотя бы у одного рыцаря врагов больше, чем друзей.

3. Ребра связного кубического графа можно покрасить в 3 цвета правильным образом (то есть так, чтобы из каждой вершины выходили три ребра разных цветов). Одно ребро удалили. Докажите, что граф остался связным.

4. а) Докажите, что в любом двусвязном графе есть простой цикл, содержащий любые два заданных ребра.

б) Верно ли, что в любом трёхсвязном графе есть простой цикл, содержащий любые три заданных ребра?

5. Пусть G — двусвязный, но недвудольный граф.

а) Докажите, что для любой вершины $a \in V(G)$ в G есть простой нечетный цикл, проходящий через a.

б) В G никакие два нечетных цикла не имеют общего ребра. Докажите, что этот граф является простым нечетным циклом.

6. В группе из n^2 человек каждый имеет не более n знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать n человек, никакие двое из которых не знакомы друг с другом.

7. На Марсе прожиают разумные сущеста трёх типов, по n каждого. Каждый марсианин знаком не менее чем с $\frac{3n}{4}$ представителями двух других типов. Докажите, что их можно разбить на n марсианских семей (каждая семья состоит из трёх попарно знакомых существ трёх разных типов).

Серия 7. Теорема Менгера и разное

1. На вечеринке гость считается застенчивым, если у него не более трех знакомых. Оказалось, что у каждого гостя не менее трех застенчивых знакомых. Докажите, что все гости — застенчивые.

2. В королевстве живут рыцари. Любые два из них либо враждуют (и такие среди них есть!), либо дружат, либо друг к другу безразличны. Друг врага рыцаря — враг этого рыцаря. Докажите, что хотя бы у одного рыцаря врагов больше, чем друзей.

3. Ребра связного кубического графа можно покрасить в 3 цвета правильным образом (то есть так, чтобы из каждой вершины выходили три ребра разных цветов). Одно ребро удалили. Докажите, что граф остался связным.

4. а) Докажите, что в любом двусвязном графе есть простой цикл, содержащий любые два заданных ребра.

б) Верно ли, что в любом трёхсвязном графе есть простой цикл, содержащий любые три заданных ребра без общих концов?

5. Пусть G — двусвязный, но недвудольный граф.

а) Докажите, что для любой вершины $a \in V(G)$ в G есть простой нечетный цикл, проходящий через a.

б) В G никакие два нечетных цикла не имеют общего ребра. Докажите, что этот граф является простым нечетным циклом.

6. В группе из n^2 человек каждый имеет не более n знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать n человек, никакие двое из которых не знакомы друг с другом.

7. На Марсе прожиают разумные сущеста трёх типов, по n каждого. Каждый марсианин знаком не менее чем с $\frac{3n}{4}$ представителями двух других типов. Докажите, что их можно разбить на n марсианских семей (каждая семья состоит из трёх попарно знакомых существ трёх разных типов).