Серия 5. Теорема о гареме

1. В селе Ивановском живут $n > 100$ человек. Житель села называется общительным, если у него не менее 100 знакомых среди односельчан. Докажите, что в Ивановском найдутся либо два знакомых между собой общительных жителя, либо два незнакомых между собой необщительных жителя.

2. В графе 2009 вершин, и каждая вершина имеет степень 4. На каждом ребре этого графа поставили стрелочку. Докажите, что найдётся вершина, в которую входит чётное число стрелок.

3. Пусть M — матрица состоящая из 0 и 1. Докажите, что наименьшее число линий (строк или столбцов) достаточное для того, чтобы покрыть все 1, равно наибольшему количеству 1 таких, что никакие две из них не лежат на одной линии.

4. В графе 200 вершин, степень каждой вершины равна 4. Оказалось, что каждое ребро графа входит хотя бы в один треугольник. Докажите, что в графе есть вершина, входящая хотя бы в три треугольника.

5. Пусть G — граф на $n \geq 3$ вершинах, $G_1, \ldots, G_n$ — все графы, полученные из G удалением одной вершины. Графы $G_1, \ldots, G_n$ изображены на n листочках, вершины графов не помечены (возможно, на некоторых картинках графы совпадают). Докажите, что по графам $G_1, \ldots, G_n$ можно установить:

а) степени вершин графа G;

б) связен ли граф G;

в) максимальные компоненты графа G в случае, когда он несвязен;

г) граф G в случае, когда известно, что он несвязен.

6. (Теорема о гареме). В одной далекой стране каждый юноша хочет жениться на k знакомых ему девушках. Докажите, что они могут это одновременно сделать тогда и только тогда, когда для любого набора юношей M количество знакомых им в совокупности девушек не меньше $k \cdot |M|$.

7. Выведите теорему Кёнига ($\alpha'(G) = \beta(G)$) из теоремы Холла.

Серия 5. Теорема о гареме

1. В селе Ивановском живут $n > 100$ человек. Житель села называется общительным, если у него не менее 100 знакомых среди односельчан. Докажите, что в Ивановском найдутся либо два знакомых между собой общительных жителя, либо два незнакомых между собой необщительных жителя.

2. В графе 2009 вершин, и каждая вершина имеет степень 4. На каждом ребре этого графа поставили стрелочку. Докажите, что найдётся вершина, в которую входит чётное число стрелок.

3. Пусть M — матрица состоящая из 0 и 1. Докажите, что наименьшее число линий (строк или столбцов) достаточное для того, чтобы покрыть все 1, равно наибольшему количеству 1 таких, что никакие две из них не лежат на одной линии.

4. В графе 200 вершин, степень каждой вершины равна 4. Оказалось, что каждое ребро графа входит хотя бы в один треугольник. Докажите, что в графе есть вершина, входящая хотя бы в три треугольника.

5. Пусть G — граф на $n \geq 3$ вершинах, $G_1, \ldots, G_n$ — все графы, полученные из G удалением одной вершины. Графы $G_1, \ldots, G_n$ изображены на n листочках, вершины графов не помечены (возможно, на некоторых картинках графы совпадают). Докажите, что по графам $G_1, \ldots, G_n$ можно установить:

а) степени вершин графа G;

б) связен ли граф G;

в) максимальные компоненты графа G в случае, когда он несвязен;

г) граф G в случае, когда известно, что он несвязен.

6. (Теорема о гареме). В одной далекой стране каждый юноша хочет жениться на k знакомых ему девушках. Докажите, что они могут это одновременно сделать тогда и только тогда, когда для любого набора юношей M количество знакомых им в совокупности девушек не меньше $k \cdot |M|$.

7. Выведите теорему Кёнига ($\alpha'(G) = \beta(G)$) из теоремы Холла.
