Серия 3. Разное.

1. В графе есть вершина a степени 1 и вершина b степени 101, а степени всех остальных вершин равны 10. Докажите, что в этом графе tcnm ab-путь.

2. Пусть G — связный граф, причем отличный от дерева. Докажите, что G имеет хотя три вершины, удаление любой из которых не нарушает связности.

3. В связном графе нет циклов длины менее 5 и степени всех вершин не менее 10. Докажите, что в нем не менее 101 вершин.

4. Дан связный граф, у которого 200 вершин нечетной степени, а остальные имеют четную степень. Докажите, что вершины этого графа можно покрыть 100 путями (не обязательно простыми!), не имеющими общих рёбер.

5. а) В компании 101 человек. Оказалось, что любых 100 из них можно разбить на 50 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть в этой компании?

б) В компании 100 человек. Оказалось, что любых 98 из них можно разбить на 49 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть в этой компании?

6. Вершины графа — mn узлов клетчатой сетки $m \times n$. В графе выделили остовное дерево T, а его вершины правильным образом покрасили в два цвета. При каких m и n все висячие вершины дерева T могут оказаться одноцветными?

7. Докажите, что из любого связного графа с четным числом вершин можно удалить несколько ребер (возможно, 0) таким образом, чтобы в полученном графе степени всех вершин оказались нечетны.

Серия 3. Разное.

1. В графе есть вершина a степени 1 и вершина b степени 101, а степени всех остальных вершин равны 10. Докажите, что в этом графе tcnm ab-путь.

2. Пусть G — связный граф, причем отличный от дерева. Докажите, что G имеет хотя три вершины, удаление любой из которых не нарушает связности.

3. В связном графе нет циклов длины менее 5 и степени всех вершин не менее 10. Докажите, что в нем не менее 101 вершин.

4. Дан связный граф, у которого 200 вершин нечетной степени, а остальные имеют четную степень. Докажите, что вершины этого графа можно покрыть 100 путями (не обязательно простыми!), не имеющими общих рёбер.

5. а) В компании 101 человек. Оказалось, что любых 100 из них можно разбить на 50 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть в этой компании?

б) В компании 100 человек. Оказалось, что любых 98 из них можно разбить на 49 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть в этой компании?

6. Вершины графа — mn узлов клетчатой сетки $m \times n$. В графе выделили остовное дерево T, а его вершины правильным образом покрасили в два цвета. При каких m и n все висячие вершины дерева T могут оказаться одноцветными?

7. Докажите, что из любого связного графа с четным числом вершин можно удалить несколько ребер (возможно, 0) таким образом, чтобы в полученном графе степени всех вершин оказались нечетны.

Серия 3. Разное.

1. В графе есть вершина a степени 1 и вершина b степени 101, а степени всех остальных вершин равны 10. Докажите, что в этом графе tcnm ab-путь.

2. Пусть G — связный граф, причем отличный от дерева. Докажите, что G имеет хотя три вершины, удаление любой из которых не нарушает связности.

3. В связном графе нет циклов длины менее 5 и степени всех вершин не менее 10. Докажите, что в нем не менее 101 вершин.

4. Дан связный граф, у которого 200 вершин нечетной степени, а остальные имеют четную степень. Докажите, что вершины этого графа можно покрыть 100 путями (не обязательно простыми!), не имеющими общих рёбер.

5. а) В компании 101 человек. Оказалось, что любых 100 из них можно разбить на 50 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть в этой компании?

б) В компании 100 человек. Оказалось, что любых 98 из них можно разбить на 49 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть в этой компании?

6. Вершины графа — mn узлов клетчатой сетки $m \times n$. В графе выделили остовное дерево T, а его вершины правильным образом покрасили в два цвета. При каких m и n все висячие вершины дерева T могут оказаться одноцветными?

7. Докажите, что из любого связного графа с четным числом вершин можно удалить несколько ребер (возможно, 0) таким образом, чтобы в полученном графе степени всех вершин оказались нечетны.