Серия 2. Деревья +

1. В связном графе нашлись три простых пути максимальной длины, каждые два из которых пересекаются ровно по одной вершине. Докажите, что у всех трех путей есть общая вершина.

2. Пусть T — дерево с хотя бы 3 вершинами. Докажите, что T имеет хотя бы одну из двух следующих конфигураций:

($*$) два листа, смежных с одной и той же вершиной;

($*$) лист, смежный с вершиной степени 2.

3.Выпуклый n-угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники.

а) Докажите что при $n \geq 4$ найдутся две диагонали, отрезающие от многоугольника треугольники.

б) Докажите что при $n \geq 6$ найдется диагональ, отрезающая четырёхугольник или пятиугольник.

4. Докажите, что у дерева может быть не более двух центров.

5. Может ли сумма попарных расстояний между вершинами 25-вершинного дерева быть равна 1225?

6. Докажите, что из любого связного графа с четным числом вершин можно удалить несколько ребер (возможно, 0) таким образом, чтобы в полученном графе степени всех вершин оказались нечетны.

7. Дано дерево. За ход разрешается стереть одно ребро, ведущее в висячую вершину, и соединить эту вершину ребром с любой другой вершиной. За какое наименьшее число ходов можно из одного заданного дерева на n вершинах гарантированно получить другое заданное дерево на n вершинах?

8. В вершинах графа расставлены числа ± 1 таким образом, что для каждой вершины произведение чисел в вершинах, соседних с ней, отрицательно. Чему может быть равно произведение чисел во всех вершинах?

Серия 2. Деревья +

1. В связном графе нашлись три простых пути максимальной длины, каждые два из которых пересекаются ровно по одной вершине. Докажите, что у всех трех путей есть общая вершина.

2. Пусть T — дерево с хотя бы 3 вершинами. Докажите, что T имеет хотя бы одну из двух следующих конфигураций:

($*$) два листа, смежных с одной и той же вершиной;

($*$) лист, смежный с вершиной степени 2.

3.Выпуклый n-угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники.

а) Докажите что при $n \geq 4$ найдутся две диагонали, отрезающие от многоугольника треугольники.

б) Докажите что при $n \geq 6$ найдется диагональ, отрезающая четырёхугольник или пятиугольник.

4. Докажите, что у дерева может быть не более двух центров.

5. Может ли сумма попарных расстояний между вершинами 25-вершинного дерева быть равна 1225?

6. Докажите, что из любого связного графа с четным числом вершин можно удалить несколько ребер (возможно, 0) таким образом, чтобы в полученном графе степени всех вершин оказались нечетны.

7. Дано дерево. За ход разрешается стереть одно ребро, ведущее в висячую вершину, и соединить эту вершину ребром с любой другой вершиной. За какое наименьшее число ходов можно из одного заданного дерева на n вершинах гарантированно получить другое заданное дерево на n вершинах?

8. В вершинах графа расставлены числа ± 1 таким образом, что для каждой вершины произведение чисел в вершинах, соседних с ней, отрицательно. Чему может быть равно произведение чисел во всех вершинах?

Серия 2. Деревья +

1. В связном графе нашлись три простых пути максимальной длины, каждые два из которых пересекаются ровно по одной вершине. Докажите, что у всех трех путей есть общая вершина.

2. Пусть T — дерево с хотя бы 3 вершинами. Докажите, что T имеет хотя бы одну из двух следующих конфигураций:

($*$) два листа, смежных с одной и той же вершиной;

($*$) лист, смежный с вершиной степени 2.

3.Выпуклый n-угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники.

а) Докажите что при $n \geq 4$ найдутся две диагонали, отрезающие от многоугольника треугольники.

б) Докажите что при $n \geq 6$ найдется диагональ, отрезающая четырёхугольник или пятиугольник.

4. Докажите, что у дерева может быть не более двух центров.

5. Может ли сумма попарных расстояний между вершинами 25-вершинного дерева быть равна 1225?

6. Докажите, что из любого связного графа с четным числом вершин можно удалить несколько ребер (возможно, 0) таким образом, чтобы в полученном графе степени всех вершин оказались нечетны.

7. Дано дерево. За ход разрешается стереть одно ребро, ведущее в висячую вершину, и соединить эту вершину ребром с любой другой вершиной. За какое наименьшее число ходов можно из одного заданного дерева на n вершинах гарантированно получить другое заданное дерево на n вершинах?

8. В вершинах графа расставлены числа ± 1 таким образом, что для каждой вершины произведение чисел в вершинах, соседних с ней, отрицательно. Чему может быть равно произведение чисел во всех вершинах?