

Серия 11. Орграфы

1. Ребра графа G разбили на два множества. Ребра из первого множества можно так ориентировать, что граф останется связным (при этом, ребра второго множества остаются двусторонними). Ребра второго множества также можно ориентировать, не нарушив связности. Докажите, что все ребра можно ориентировать так, чтобы получился сильно связный орграф.

2. Дан неполный ориентированный граф G без кратных стрелок. При добавлении любой стрелки (без появления кратных и встречных стрелок) он становится сильно связным. Докажите, что граф G является сильно связным.

3. Дан связный граф. Докажите, что в нем можно выделить остовное дерево и ориентировать его ребра так, чтобы для любых двух вершин, соединенных ребром в исходном графе, из одной из них в другую можно было бы пройти по стрелкам.

4. В связном графе четное число ребер. Докажите, что ребра можно ориентировать так, чтобы из каждой вершины выходило четное число ребер.

5. Каждый сотрудник компании “Кака-кола”, имеющий четное число знакомых среди сотрудников, послал им по письму, а каждый из остальных сотрудников компании послал по письму всем незнакомым. Тедди получил 99 писем. Докажите, что он получит еще хотя бы одно письмо.

6. В ориентированном графе 200 вершин, из каждой вершины выходит хотя бы одна стрелка и в каждую вершину входит хотя бы одна стрелка. Докажите, что можно добавить не более 100 новых стрелок так, чтобы этот орграф стал сильно связным. (Между двумя вершинами может быть проведено несколько стрелок.)

7. Степени всех вершин графа G не превосходят 1000. Докажите, что рёбра этого графа можно ориентировать так, чтобы длина максимального ориентированного пути не превосходила 1000.