

# Теория графов. Глава 8. Сети и потоки.

Д. В. Карпов

27.11.2020

- Задано множество вершин  $V$ , в котором выделены две вершины:  $s$  (*вход* или *исток*) и  $t$  (*выход* или *сток*).
- Определена функция  $c : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющая для любых вершин  $x, y \in V$  соотношениям
$$c(x, y) \geq 0,$$
$$c(x, s) = 0,$$
$$c(t, y) = 0$$

Тогда  $G = (V, s, t, c)$  — *сеть*, функция  $c$  называется *пропускной способностью* сети  $G$ .

Множество  $A(G) = \{(x, y) : c(x, y) > 0\}$  называется *множеством стрелок* сети  $G$ .

- Мы часто будем рассматривать сеть  $G$  как оргграф с множеством вершин  $V$  и множеством стрелок  $A(G)$ .
- Например, говоря “путь в сети  $G$ ”, будем иметь в виду путь в оргграфе  $(V, A(G))$ .

## Определение

Пусть  $G$  — сеть, а функция  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет трем условиям:

$$(F1) \quad \text{для любых } x, y \in V \quad f(x, y) \leq c(x, y);$$

$$(F2) \quad \text{для любых } x, y \in V \quad f(x, y) = -f(y, x);$$

(F3) для любой вершины  $v \in V$ ,  $v \neq s, t$  выполняется условие  $\sum_{x \in V} f(v, x) = 0$ .

- Тогда  $f$  — **поток** в сети  $G$ .
- Число  $|f| = \sum_{x \in V} f(s, x)$  называется **величиной потока**.
- Поток сети  $G$  с максимальной величиной называется **максимальным**.
- Вообще-то не очевидно, что максимальный поток существует.

## Разрез

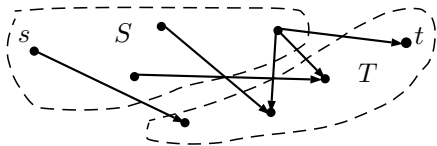
### Определение

1) Пусть  $G$  — сеть, а множество ее вершин  $V$  разбито на два непересекающихся множества  $S \ni s$  и  $T \ni t$ . Тогда  $(S, T)$  — **разрез** сети  $G$ .

2) Величина  $c(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} c(x, y)$  называется **пропускной способностью разреза**.

3) Любой разрез сети  $G$  с минимальной пропускной способностью называется **минимальным**.

4) Для любого потока  $f$  в сети  $G$  величина  $f(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} f(x, y)$  называется **поток через разрез**  $(S, T)$ .



• Нетрудно понять, что минимальный разрез сети существует. Возможно, таких разрезов несколько.

## Лемма 1

Для любого потока  $f$  и разреза  $(S, T)$  сети  $G$  выполняется  $|f| = f(S, T)$ .

**Доказательство.** • Ввиду условия (F3)

$$|f| = \sum_{x \in V} f(s, x) = \sum_{y \in S} \left( \sum_{x \in V} f(y, x) \right). \quad (*)$$

• В правой части равенства (\*) для любых двух вершин  $y, z \in S$  присутствуют слагаемые  $f(y, z)$  и  $f(z, y)$ , в силу (F2) в сумме дающие 0. Поэтому,

$$\sum_{y \in S} \left( \sum_{x \in V} f(y, x) \right) = \sum_{x \in S, y \in T} f(x, y) = f(S, T),$$

что и требовалось доказать. □

## Остаточная сеть. Дополняющий путь

### Определение

1) Пусть  $f$  — поток в сети  $G$ . Рассмотрим сеть  $G_f$  с теми же  $V$ ,  $s$ ,  $t$  и пропускной способностью

$$c_f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y = s \text{ или } x = t, \\ c(x, y) - f(x, y) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Назовем  $G_f$  *остаточной сетью* потока  $f$ .

2) *Дополняющий путь* потока  $f$  — это любой путь  $st$ -путь в остаточной сети  $G_f$ .

### Лемма 2

Пусть  $f$  — поток в сети  $G$ ,  $f'$  — поток в остаточной сети  $G_f$ . Тогда  $f + f'$  — поток в сети  $G$ , причём

$$|f + f'| = |f| + |f'|.$$

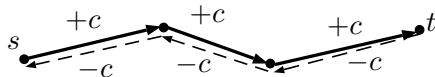
**Доказательство.** Нетрудно проверить для потока  $f + f'$  условия (F1), (F2) и (F3). Утверждение про величину потока очевидно.

### Определение

Пусть  $P$  —  $st$ -путь в сети  $G$ , а  $c$  — минимальная пропускная способность стрелки пути  $P$ . Определим поток  $f_P$  *вдоль пути*  $P$ :

$$f_P(x, y) = c \text{ при } xy \in A(P), \quad f_P(x, y) = -c \text{ при } yx \in A(P),$$

$$f_P(x, y) = 0 \text{ при } xy, yx \notin A(P).$$



- Нетрудно понять, что  $f_P$  — действительно поток.

## Теорема Форда-Фалкерсона

### Теорема 1

(L. R. Ford, D. R. Fulkerson, 1956.) В сети  $G = (V, s, t, c)$  задан поток  $f$ . Тогда следующие три утверждения равносильны.

- 1° Поток  $f$  максимален.
- 2° Существует такой разрез  $(S, T)$ , что  $|f| = c(S, T)$ ;
- 3° В остаточной сети  $G_f$  нет дополняющего пути.

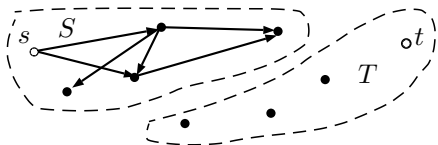
**Доказательство.**  $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ . Рассмотрим другой поток  $f'$ .  
По Лемме 1

$$\begin{aligned} |f'| = f'(S, T) &= \sum_{x \in S, y \in T} f(x, y) \\ &\leq \sum_{x \in S, y \in T} c(x, y) = c(S, T) = |f|, \end{aligned}$$

откуда следует максимальность  $f$ .



$1^\circ \Rightarrow 3^\circ$ . Предположим противное, пусть в остаточной сети  $G_f$  есть дополняющий путь  $P$ , а  $f_P$  — поток вдоль пути  $P$ . По Лемме 2 тогда  $f + f_P$  — поток в  $G$ , причём  $|f + f_P| = |f| + |f_P| > |f|$ , противоречие с максимальнойностью  $f$ .



$3^\circ \Rightarrow 2^\circ$ . • Пусть  $S$  — множество всех вершин, достижимых из  $s$  в остаточной сети  $G_f$  (см. рисунок).

• Так как в  $G_f$  нет дополняющего пути, то  $t \notin S$ . Тогда  $(S, T = V \setminus S)$  — разрез в сетях  $G$  и  $G_f$ .

• По построению  $A_{G_f}(S, T) = \emptyset$ . следовательно,  $0 = c_f(S, T) = c(S, T) - f(S, T)$ , откуда  $c(S, T) = f(S, T) = |f|$  (последнее равенство следует из Леммы 2). □

## Следствие 1

*Величина максимального потока в сети  $G$  равна пропускной способности минимального разреза сети  $G$ .*

### Доказательство.

- Рассмотрим максимальный поток  $f$  и такой разрез  $(S, T)$ , что  $|f| = c(S, T)$  (такой разрез существует по теореме 1).
- Тогда для любого другого разреза  $(S', T')$  мы имеем  $c(S', T') \geq f(S', T') = f(S, T) = c(S, T)$ . Значит, разрез  $(S, T)$  минимален. □

### Определение

- Сеть  $G$  называется **целой**, если ее пропускная способность  $c$  — целочисленная.
- Поток  $f$  называется **целым**, если на любой паре вершин он принимает целочисленное значение.

## Теорема 2

*В целой сети  $G$  существует максимальный поток. Среди максимальных потоков целой сети найдется целый.*

**Доказательство.** • Будем последовательно строить поток. Изначально положим  $f = 0$ .

• Пусть в некоторый момент есть целый поток  $f$  в целочисленной сети  $G$ . Рассмотрим остаточную сеть  $G_f$ . Если в  $G_f$  нет дополняющего пути  $P$ , то по Теореме 1 поток  $f$  максимальный.

• Если же в  $G_f$  есть дополняющий путь  $P$ , то рассмотрим поток  $f_P$  вдоль пути  $P$  в остаточной сети  $G_f$  и положим  $f := f + f_P$ .

• По Лемме 2 мы построили новый целый поток в  $G$ , причем его пропускная способность на  $|f_P|$  больше, чем у предыдущего.

• Так как с каждым шагом величина потока возрастает на целую величину (хотя бы на 1), процесс обязательно закончится, в результате мы получим целый максимальный поток в сети  $G$ .



## Рёберная теорема Менгера

- Именно так обычно называют следующую теорему. Несмотря на то, что эта теорема имеет много общего с теоремой Менгера и даже может быть из нее выведена, впервые она была доказана Фордом и Фалкерсоном в качестве примера применения разработанного ими метода.

### Определение

Пусть  $G$  — неориентированный граф без петель, кратные рёбра допускаются.

Для  $x, y \in V(G)$  обозначим через  $\lambda_G(x, y)$  размер минимального множества рёбер, отделяющего  $x$  от  $y$ . Назовем  $\lambda_G(x, y)$  *рёберной связностью* вершин  $x$  и  $y$ .

### Теорема 3

**(L. R. Ford, D. R. Fulkerson, 1956.)** Пусть  $s, t \in V(G)$ . Тогда существует  $\lambda_G(s, t)$  путей из  $s$  в  $t$ , не имеющих общих рёбер.

**Доказательство.** • Построим сеть  $\vec{G}$  на множестве вершин  $V(G)$ . Входом будет  $s$ , выходом будет  $t$ .

• Определим пропускные способности:  $c(x, y)$  равняется кратности ребра  $xu$  в графе  $G$  (то есть, 0, если такого ребра нет, и  $m$ , если в графе  $G$  есть  $m$  кратных рёбер  $xu$ ). Дополнительно определим  $c(x, s) = c(t, x) = 0$  для всех  $x \in V(G)$ .

• Отметим, что при  $x, y \notin \{s, t\}$  мы имеем  $c(x, y) = c(y, x)$ .

• Сеть  $\vec{G}$  — целая. По Теореме 2 в ней есть целый максимальный поток  $f$ . Пусть  $|f| = k$ .

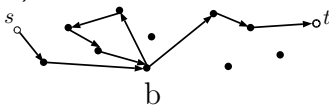
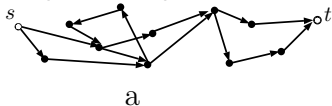
### Утверждение

*Поток  $f$  распадается на  $k$  непересекающихся  $st$ -путей.*

**Доказательство.** • Построим новый оргграф  $G'$  на тех же вершинах. Если  $f(x, y) = \ell > 0$  для  $x, y \in V(G)$ , мы проведем в  $G'$  ровно  $\ell$  стрелок  $xu$ .

• Понятно, что  $\ell \in \mathbb{Z}$  и в графе  $G$  есть не менее  $\ell$  ребер, соединяющих  $x$  и  $y$ .

- Из вершины  $s$  выходит ровно  $k$  стрелок, а в каждой отличной от  $s$  и  $t$  вершине  $v$  по свойству потока ( $F3$ ) количества входящих и выходящих стрелок равны (см. рис. а). Встречных стрелок по свойству ( $F2$ ) потока нет.



- Выйдем из  $s$  и будем каждый раз проходить по стрелке орграфа  $G'$ , по которой еще не ходили. В некоторый момент мы достигнем  $t$  (если в любую другую вершину мы вошли, сможем и выйти, см. рис. b).
- Удалим из  $G'$  стрелки пройденного пути, теперь из  $s$  выходит  $k - 1$  стрелка. Повторим эти действия еще  $k - 1$  раз. В результате будет выделено  $k$  непересекающихся по рёбрам  $st$ -путей в графе  $G$  (не обязательно простых).  $\square$
- Вернемся к доказательству Теоремы 3. По Теореме 1 для максимального потока  $f$  существует такой разрез  $(S, T)$  нашей сети, что  $c(S, T) = |f| = k$ .
- Тогда из  $S$  в  $T$  выходит ровно  $k$  рёбер графа  $G$  (так как для  $x \in S$  и  $y \in T$  пропускная способность  $c(x, y)$  равна количеству рёбер между  $x$  и  $y$ ). Эти  $k$  рёбер отделяют  $S$  от  $T$ , а стало быть, и  $s$  от  $t$  в графе  $G$ . Значит,  $k \geq \lambda_G(s, t)$ .

## Определение

Граф называется **рёберно  $k$ -связным**, если он остается связным после удаления любого множества, состоящего из менее чем  $k$  рёбер.

## Следствие

*В рёберно  $k$ -связном графе  $G$  для любых двух вершин  $s, t$  существует  $k$  путей из  $s$  в  $t$ , не имеющих общих рёбер.*

**Доказательство.** Достаточно применить Теорему 3 к паре вершин  $s$  и  $t$ .

### Теорема 4

(Е. А. Диниц, 1970). В произвольной сети  $G$  существует максимальный поток.

**Доказательство.** • План доказательства такой же, как и в Теореме 2: мы будем постепенно увеличивать максимальный поток, добавляя к нему поток вдоль дополняющего пути. Однако, на этот раз нам нельзя произвольно выбирать дополняющий путь.

• Пусть в некоторый момент построен поток  $f$  в сети  $G$ . Рассмотрим остаточную сеть  $G_f$ . Если в  $G_f$  нет дополняющего пути  $P$ , то по Теореме 1 поток  $f$  максимальный. Пусть в  $G_f$  есть дополняющие пути.

• Мы выберем самый короткий дополняющий путь  $P$  в  $G_f$ , рассмотрим поток  $f_P$  вдоль пути  $P$  и положим  $f' := f + f_P$ . Почему же этот процесс когда-нибудь закончится?



## Утверждение

Пусть  $Q$  — простой  $st$ -путь в остаточной сети  $G_{f'}$ , которого нет в остаточной сети  $G_f$ . Тогда  $Q$  длиннее, чем  $P$ .


**Доказательство.** • Пусть  $s = x_0x_1 \dots x_k = t$  — это путь  $P$ .

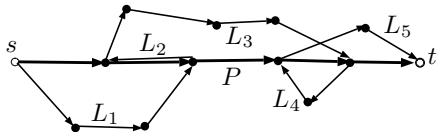
Понятно, что путь  $P$  — простой, а значит, все его вершины различны.

• Сначала поймем, какие же стрелки могут входить в  $A(G_{f'}) \setminus A(G_f)$ . Такая стрелка  $yz$  имеет  $c_f(y, z) = 0$ , но  $0 < c_{f'}(y, z) = c_f(y, z) - f_p(y, z)$ . Значит,  $zy \in A(P)$ , то есть,  $z = x_i$  и  $y = x_{i+1}$  для некоторого  $i$ . По условию, путь  $P$  содержит хотя бы одну такую стрелку.

• **Трансверсаль** пути  $P$  — это путь между двумя его вершинами, внутренние вершины которого не принадлежат  $P$ .

• Назовём  $x_i x_j$ -трансверсаль  $L$  пути  $P$  **правильной**, если  $i < j$  и **неправильной** в противном случае.

• Стрелку  $x_i x_{i+1}$ , мы будем считать правильной трансверсалью пути  $P$ , а стрелку  $x_{i+1} x_i$  — неправильной. 



- Путь  $Q$  разбивается на трансверсали пути  $P$  — пусть это  $L_1, \dots, L_m$ . Как показано выше, среди них есть хотя бы одна обратная стрелка пути  $P$  — а это неправильная трансверсаль.
- Пусть  $L$  — правильная  $x_i x_j$ -трансверсаль пути  $P$ . Тогда все стрелки трансверсали  $L$  лежат в  $A(G_f)$ . Если  $L$  короче, чем  $x_i P x_j$ , то мы могли бы заменить этот участок пути  $P$  на трансверсаль  $L$  и найти в  $G_f$  более короткий путь, чем  $P$ , противоречие с выбором пути  $P$ .
- Таким образом, каждая правильная трансверсаль пути  $P$  не короче участка пути  $P$  между ее концами. Заменяем каждую правильную трансверсаль на соответствующий участок между ее концами — в результате получится путь  $Q'$ , который не длиннее чем  $Q$ .
- Поскольку оба пути  $P$  и  $Q'$  ведут из  $s$  в  $t$ , путь  $Q'$  содержит все рёбра пути  $P$ . Так как  $Q$  (а стало быть, и  $Q'$ ) содержит хотя бы одну неправильную трансверсаль пути  $P$ , путь  $Q'$  (а следовательно, и  $Q$ ) строго длиннее чем  $P$ .

- Вернемся к доказательству Теоремы 4
- После каждого шага алгоритма построения потока взамен одного из кратчайших путей из  $s$  в  $t$  в остаточной сети могут появиться лишь строго более длинные пути.
- Значит, в результате каждого шага либо увеличивается длина кратчайшего  $st$ -пути, либо эта длина сохраняется, но уменьшается количество кратчайших  $st$ -путей.
- Отметим, что кратчайший путь — всегда простой, а длина простого пути из  $s$  в  $t$  ограничена количеством вершин сети. Значит, процесс построения закончится, и в результате получится остаточная сеть без дополняющих путей. По Теореме 1 это означает, что будет построен максимальный поток. □