

# Теория графов. Глава 7. Орграфы.

Д. В. Карпов

12.11.2020

## Определение

1) Мы будем называть рёбра орграфа *стрелками*, а множество всех стрелок ориентированного графа  $D$  будем обозначать через  $A(D)$ . Будем использовать обозначение  $a(D) = |A(D)|$ .

2) Через  $E(D)$  мы будем обозначать множество ребер орграфа  $D$  без ориентации (каждую стрелку заменим обычным неориентированным ребром).

3) Для непересекающихся множеств  $X, Y \subset V(D)$  через  $A_D(X, Y)$  мы будем обозначать множества всех стрелок орграфа  $D$  с началом в  $X$  и концом в  $Y$ . Будем использовать обозначение  $a_D(X, Y) = |A_D(X, Y)|$ .

4) Запись  $e = xy \in A(D)$  будет обозначать, что  $e$  — стрелка с началом  $x$  и концом  $y$ . В случае, когда допускаются кратные стрелки, эта запись не утверждает, что  $e$  — единственная стрелка с началом  $x$  и концом  $y$ .

- Если не оговорено обратное, мы будем считать, что в орграфе нет петель и сонаправленных кратных стрелок (у которых совпадают и начала, и концы).

- Пары *встречных* стрелок (вида  $uv$  и  $vu$ ), как правило, допускаются.

- *Подграф* орграфа (в частности, *индуцированный подграф*) определяется так же, как для неориентированных графов.

Индукцированный подграф орграфа  $D$  на множестве вершин  $X \subset V(D)$  будем обозначать через  $D(X)$ .

- Для любой вершины  $v$  орграфа  $D$  мы через  $N_D^+(v)$  обозначим множество вершин орграфа  $D$ , в которые выходят стрелки из  $v$ , а через  $N_D^-(v)$  обозначим множество вершин орграфа  $D$ , из которых выходят стрелки в  $v$ .

- $N_D(v) = N_D^+(v) \cup N_D^-(v)$  — *окрестность* вершины  $v$ .

- *Степень* вершины  $x \in V(D)$  — это количество инцидентных ей рёбер из  $E(D)$ .

- Для вершины  $x \in V(D)$  через  $d_D^+(x)$  мы будем обозначать *исходящую степень* вершины  $v$ , то есть, количество стрелок орграфа  $D$ , выходящих из вершины  $x$ , а через  $d_D^-(x)$  мы будем обозначать *входящую степень* вершины  $v$  — количество стрелок орграфа  $D$ , входящих в вершину  $x$ .

- $\delta(D)$ ,  $\delta^+(D)$  и  $\delta^-(D)$  — минимальные степень, исходящую степень и входящую степень вершин  $D$  соответственно.

Аналогично,  $\Delta(D)$ ,  $\Delta^+(D)$  и  $\Delta^-(D)$  — это максимальные степень, исходящая степень и входящая степень орграфа  $D$ .

- Нетрудно понять, что для орграфа  $D$  и вершины  $v \in V(D)$  выполнено  $d_D(x) = d_D^+(x) + d_D^-(x)$ ,  
 $d_D(v) = |N_D(v)|$ .
- Если в орграфе нет кратных стрелок, то  
 $d_D^+(v) = |N_D^+(v)|$ ,  $d_D^-(v) = |N_D^-(v)|$ .
- *Пути и циклы* в ориентированном графе отличаются от обычного графа тем, что каждая стрелка может быть пройдена только в соответствии с направлением от начала к концу. Таким образом, у каждого пути в орграфе есть *начало* и *конец*, а у каждого цикла — фиксированное *направление обхода*.
- *Расстояние*  $\text{dist}_D(x, y)$  от вершины  $x$  до вершины  $y$  в орграфе  $D$  есть длина кратчайшего  $x$ - $y$ -пути. В орграфе  $D$  возможно, что  $\text{dist}_D(x, y) \neq \text{dist}_D(y, x)$ .
- Удаление вершин и стрелок из орграфа мы определим и будем обозначать так же, как удаление вершин и рёбер из неориентированного графа.
- Аналогично неориентированному графу определяется стягивание стрелки.

- Для неориентированного графа  $H$  его *ориентацией* является любой граф  $\vec{H}$  с  $V(\vec{H}) = V(H)$ , стрелки которого — это ориентированные каким-либо способом рёбра из  $E(H)$ . Таким образом, у графа  $H$  есть  $2^{E(H)}$  ориентаций.
- Для орграфа  $D$  определим неориентированный граф  $\underline{D}$  с множеством вершин  $V(D)$  и множеством рёбер  $E(D)$ .
- Иногда допускается *частичная ориентация* рёбер графа  $G$ , когда часть рёбер остается неориентированными, по ним разрешен проход в обе стороны.

## Сильная связность

### Определение

Вершины  $a$  и  $b$  ориентированного графа  $G$  назовем *связанными*, если в графе  $G$  существуют пути из  $a$  в  $b$  и из  $b$  в  $a$ .

Ориентированный граф  $G$  называется *сильно связным*, если любые две его вершины связаны.

- Отношение связности вершин ориентированного графа  $G$  является отношением эквивалентности (рефлексивно, симметрично, транзитивно).
- Множество вершин  $V(G)$  разбивается на классы попарно связанных вершин, которые мы будем называть *компонентами сильной связности*.
- Для краткости, вместо “компонента сильной связности” будем писать КСС.
- Построим для орграфа  $G$  *орграф компонент сильной связности*  $C(G)$ , вершины которого — КСС  $G$ . Проведем в графе  $C(G)$  стрелку  $V_i \rightarrow V_j$  тогда и только тогда, когда в графе  $G$  есть хотя бы одна стрелка, направленная от КСС  $V_i$  к  $V_j$ .

## Определение

Орграф называется *ациклическим*, если он не имеет ориентированных циклов.

## Лемма 1

Для любого ориентированного графа  $G$  выполняются следующие утверждения.

- 1)  $C(G)$  — ациклический орграф.
- 2) Для любой компоненты сильной связности  $V_i$  индуцированный подграф  $G(V_i)$  сильно связан.

**Доказательство.** 1) Предположим противное, пусть в  $C(G)$  есть цикл  $V_1V_2 \dots V_k$ . Тогда в графе  $G$  все вершины из  $\cup_{i=1}^k V_i$  попарно связаны и, следовательно, входят в одну КСС. Противоречие.

2) • Пусть  $w_1, w_2 \in V_i$ . Тогда существует  $w_1w_2$ -путь  $S$  и  $w_2w_1$ -путь  $T$  в орграфе  $G$ .

• Понятно, что все вершины из  $V(S) \cup V(T) \ni w_1, w_2$  связаны в орграфе  $G$ , следовательно,  $V(S) \cup V(T) \subset V_i$ , то есть, вершины  $w_1$  и  $w_2$  связаны в  $G(V_i)$ . Таким образом, граф  $G(V_i)$  сильно связан.

## Определение

Пусть  $V_i$  — компонента сильной связности ориентированного графа  $G$ .

- Назовем эту компоненту *промежуточной*, если в графе  $C(G)$  существует стрелка, входящая в  $V_i$ , и существует стрелка, выходящая из  $V_i$ .
- В противном случае назовем компоненту  $V_i$  *крайней*.
- Так как в  $C(G)$  нет циклов, любой максимальный путь в этом графе начинается в вершине, из которой все ребра выходят, и заканчивается в вершине, в которую все ребра входят. Такие вершины соответствуют крайним компонентам сильной связности.
- Таким образом, любая промежуточная компонента сильной связности орграфа  $G$  лежит в  $C(G)$  на пути между какими-то двумя крайними компонентами.



## Лемма 2

*Орграф  $D$  сильно связан, если и только если для любого множества  $W \subset V(D)$  существует стрелка из  $W$  в  $V(D) \setminus W$ .*

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Если из некоторого множества  $W \subset V(D)$  нет стрелки в  $V(D) \setminus W$ , то невозможно попасть из  $W$  в  $V(D) \setminus W$ , что противоречит сильной связности  $D$ .

$\Leftarrow$ . Если орграф не является сильно связным, то он имеет крайнюю компоненту сильной связности  $W$ , из которой не выходит ни одной стрелки в  $V(D) \setminus W$ , что противоречит условию.  $\square$

### Лемма 3

*Орграф  $D$  является ациклическим, если и только если его вершины можно занумеровать так, что любая стрелка ведет из вершины с меньшим номером к вершине с большим номером.*

**Доказательство.**  $\Leftarrow$ . Если такая нумерация существует, отсутствие циклов очевидно: ни из какой вершины нельзя попасть в вершину с меньшим номером.

$\Rightarrow$ . Существование нумерации для орграфа, не являющегося сильно связным, докажем по индукции.

- База для одновершинного орграфа очевидна.
- Понятно, что в ациклическом орграфе есть вершина  $a$ , из которой не выходит ни одной стрелки. По индукционному предположению построим нумерацию для (очевидно, ациклического) орграфа  $D - a$ , после чего присвоим вершине  $a$  последний, самый большой номер.  $\square$

## Входящее и исходящее дерево

### Определение

Пусть  $T$  — такой орграф, что неориентированный граф  $\underline{T}$  — дерево,  $a \in V(T)$ .

- 1) Если из каждой вершины орграфа  $T$ , кроме  $a$ , выходит ровно одно ребро, то  $T$  называется *входящим деревом* вершины  $a$ .
- 2) Если в каждую вершину орграфа  $T$ , кроме  $a$ , входит ровно одно ребро, то  $T$  называется *исходящим деревом* вершины  $a$ .

### Лемма 4

- 1) Если  $D$  — входящее дерево вершины  $a$ , то из каждой вершины  $D$  существует путь до  $a$ .
- 2) Если  $D$  — исходящее дерево вершины  $a$ , то из  $a$  существует путь до каждой вершины  $D$ .

**Доказательство.** 1) Пусть  $x \in V(D)$ . Построим максимальный путь  $P$  с началом в  $x$ . Так как  $D$  — ациклический орграф, из конца пути  $P$  не выходит ни одной стрелки, значит, этот конец — вершина  $a$ .

- 2) Аналогично.

## Теорема 1

Пусть  $G$  — орграф,  $a \in V(G)$ ,  $V_a^-$  — множество всех вершин  $G$ , из которых можно дойти до  $a$ , а  $V_a^+$  — множество всех вершин  $G$ , до которых можно дойти из  $a$  (мы считаем, что  $a \in V_a^-$  и  $a \in V_a^+$ ). Тогда существует входящее дерево вершины  $a$  с множеством вершин  $V_a^-$  и исходящее дерево вершины  $a$  с множеством вершин  $V_a^+$ .

**Доказательство.** Построим входящее дерево, исходящее строится аналогично.

- Положим  $L_0 = \{a\}$ , пусть  $L_k = \{x : \text{dist}_G(x, a) = k\}$ . Если  $m$  — наибольшее расстояние от вершины множества  $V_a^-$  до  $a$ , то  $\cup_{k=0}^m L_k = V_a^-$ .
- Для всех  $k > 0$  проведем от каждой вершины  $x \in L_k$  ровно одну стрелку, выходящую из  $x$  к вершине уровня  $L_{k-1}$  — предку  $x$  (такая стрелка, очевидно, есть). Обозначим через  $D$  орграф с построенным множеством стрелок. В  $D$  из каждой вершины, кроме  $a$ , выходит ровно одна стрелка.

- Предположим, что в  $\underline{D}$  есть цикл  $Z$ . Пусть  $v$  — вершина наибольшего уровня  $L_m$  в  $Z$ .
- Тогда оба соседа  $v$  в  $Z$  должны лежать в уровнях не более  $m$ . Но по построению  $v$  смежна в  $\underline{D}$  только с одной вершиной уровня не более  $m$  — со своим предком. Противоречие.
- Значит,  $\underline{D}$  ацикличен, тогда  $D$  — входящее дерево вершины  $a$ . □

## Следствие 1

*В сильно связном орграфе  $G$  для любой вершины  $a$  существует исходящее и входящее деревья вершины  $a$  с множеством вершин  $V(G)$ .*

**Доказательство.** Так как орграф  $G$  сильно связан,  $V_a^- = V_a^+ = V(G)$ . □

## Теорема 2

*Для сильно связного орграфа  $G$  на  $n$  вершинах выполняются следующие утверждения.*

- 1) Существует сильно связный остовный подграф орграфа  $G$ , в котором не более  $2n - 2$  стрелок.*
- 2) Пусть  $k$  — длина наибольшего простого цикла в орграфе  $G$ . Тогда существует сильно связный остовный подграф орграфа  $G$ , в котором не более  $2n - k$  стрелок.*

**Доказательство.** 1) Пусть  $v \in V(G)$ , а  $T_v^+$  и  $T_v^-$  — это исходящее и входящее деревья вершины  $v$ , соответственно (они существуют по Следствию 1).

- Понятно, что остовный подграф орграфа  $G$ , полученный объединением этих двух деревьев, будет сильно связным и содержит не более  $2n - 2$  стрелок.

2) Пусть  $Z$  — простой цикл длины  $k$  в  $G$ .

- Построим новый орграф  $G'$ , объединив все вершины цикла  $Z$  в одну новую вершину  $z$ . (Все стрелки, соединяющие остальные вершины орграфа  $G$  с вершинами цикла  $Z$ , в новом графе будут соединять эти же вершины с  $z$ . Возможно, в орграфе  $G'$  появятся кратные стрелки.)

- Орграф  $G'$  на  $n - k + 1$  вершинах также будет сильно связным.

- По пункту 1 в нем можно оставить не более  $2(n - k)$  стрелок, обеспечивающих его сильную связность. В орграфе  $G$  к соответствующим стрелкам мы добавим  $k$  стрелок цикла  $Z$  и получим сильно связный остов, в котором не более  $2(n - k) + k = 2n - k$  стрелок. □

## Следствие

*Если в сильно связном орграфе  $G$  между любыми двумя вершинами проведено не более одной стрелки, то существует сильно связный остовный подграф орграфа  $G$ , в котором не более  $2n - 3$  стрелок.*

### Доказательство.

- Очевидно, в сильно связном орграфе есть простой цикл. Пусть  $k$  — длина наибольшего простого цикла в  $G$ . Из условия следует, что  $k \geq 3$ .
- По пункту 2 Теоремы 2 у  $G$  существует сильно связный остовный подграф, в котором не более чем  $2(n - k) + k \leq 2n - 3$  стрелок. □



## Гамильтоновы циклы в орграфе

- *Гамильтонов цикл* в орграфе — это простой ориентированный цикл, проходящий по всем вершинам.
- Можно обобщить на орграфы и один из классических критериев гамильтоновости — критерий Дирака. С критерием Оре это сделать не получается.

### Лемма 5

Пусть орграф  $G$  таков, что  $\max(\delta^+(G), \delta^-(G)) \geq k \geq 2$ . Тогда  $G$  имеет путь длины хотя бы  $k$  и цикл длины хотя бы  $k + 1$ .

**Доказательство.** • НУО  $\delta^+(G) \geq k$ .

• Рассмотрим путь максимальной длины  $P = a_1 a_2 \dots a_n$  в орграфе  $G$ . Из его последней вершины  $a_n$  выходит хотя бы  $k$  стрелок. Так как путь  $P$  нельзя продлить, все эти стрелки выходят в  $a_1, \dots, a_{n-1}$ .

• Пусть  $a_m$  — вершина наименьшего номера, для которой  $a_n a_m \in A(G)$ . Тогда в множестве  $\{a_m, \dots, a_{n-1}\}$  лежат не менее  $k$  концов выходящих из  $a_n$  стрелок, следовательно, в этом множестве хотя бы  $k$  вершин. Значит, путь и цикл  $a_m \dots a_{n-1} a_n$  нам подходят.



## Теорема 3

**(A. Ghouila-Houri, 1960.)** Пусть орграф  $G$  таков, что  $\min(\delta^+(G), \delta^-(G)) \geq \frac{v(G)}{2}$ . Тогда  $G$  имеет гамильтонов цикл.

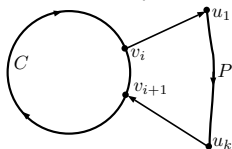
**Доказательство.** • Рассмотрим максимальный цикл  $C = v_1 \dots v_m$ . Тогда  $m \geq \frac{v(G)}{2} + 1$  по Лемме 5. Нумерацию вершин считаем циклической по модулю  $m$ .

• Предположим, что цикл  $C$  не является гамильтоновым и рассмотрим орграф  $H = G - V(C)$ . Пусть  $P = u_1 \dots u_k$  — максимальный путь в  $H$ .

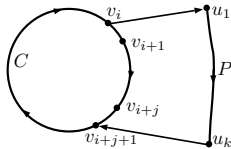
• Тогда  $m + k \leq v(G)$  и  $k \leq \frac{v(G)}{2} - 1$ .

• Положим  $S = \{i : v_i u_1 \in A(G)\}$  и  $T = \{i : u_k v_{i+1} \in A(G)\}$ .

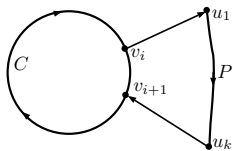
• Если  $S \cap T \ni i$ , то мы увеличим цикл  $C$ , заменив стрелку  $v_i v_{i+1}$  на путь  $v_i u_1 P u_k v_{i+1}$  (см. рис. а), что противоречит максимальнойности цикла  $C$ . Следовательно,  $S \cap T = \emptyset$ .



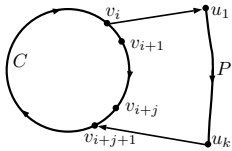
а



б



a



b

- В силу максимальности пути  $P$  мы имеем  $N_G^+(u_k) \subset V(C) \cup V(P)$  и  $N_G^-(u_1) \subset V(C) \cup V(P)$ .
- Следовательно,  $\frac{v(G)}{2} \leq d_G^+(u_k) \leq k - 1 + |T|$  и  $\frac{v(G)}{2} \leq d_G^-(u_1) \leq k - 1 + |S|$ .
- Так как  $S \cap T = \emptyset$  и  $k \leq \frac{v(G)}{2} - 1$ , получим  $|S| \geq 1$ ,  $|T| \geq 1$  и  $|S \cup T| = |S| + |T| \geq v(G) - 2k + 2 \geq m - k + 2$ .
- Существуют такие индексы  $i$  и  $j$ , что  $i \in S$ ,  $i + 1, \dots, i + j - 1 \notin S \cup T$  и  $i + j \in T$ . По доказанному выше  $j - 1 \leq k - 2$ .
- Тогда  $v_i u_1, u_k v_{i+j+1} \in A(G)$  и мы получаем цикл  $v_{i+j+1} C v_i u_1 P u_k$  (см. рис. b), в котором хотя бы на одну вершину больше чем в  $C$ . Противоречие.

## Турниры

### Определение

*Турниром*, называется орграф, в котором любые две вершины соединены ровно одной стрелкой.

• Такие орграфы называют турнирами, так как с их помощью удобно изображать однокруговые турниры без ничьих.

### Лемма 6


*В турнире существует гамильтонов путь.*

**Доказательство.** • Рассмотрим самый длинный простой путь  $P = a_1 \dots a_k$  в турнире  $T$ .

• Предположим, что он не гамильтонов и рассмотрим не вошедшую в  $P$  вершину  $b \in V(T)$ .

• Если  $ba_1 \in A(T)$ , то добавим  $b$  в начало пути. Если  $a_nb \in A(T)$ , то добавим  $b$  в конец пути. Так как это противоречит максимальнойности  $P$ , имеем  $a_1b \in A(T)$  и  $ba_n \in A(T)$

• Тогда существует такое  $i \leq k - 1$ , что  $a_ib \in A(T)$  и  $ba_{i+1} \in A(T)$ . В этом случае можно вставить  $b$  между  $a_i$  и  $a_{i+1}$  и увеличить путь. Противоречие с максимальнойностью  $P$ .

• Значит, наше предположение неверно и  $P$  — гамильтонов 

## Следствие 2

*Структура компонент сильной связности турнирного графа представляет собой простой путь  $V_1 V_2 \dots V_m$ , в котором для любых двух различных компонент  $V_i$  и  $V_j$ , где  $i < j$ , все ребра графа ориентированы от  $V_i$  к  $V_j$ .*

**Доказательство.** • Между любыми двумя компонентами турнира  $T$  есть стрелка. Следовательно, орграф КСС  $C(T)$  — турнир.

• Пусть  $V_1, \dots, V_m$  — все КСС турнира  $T$ . По Лемме 6 в  $C(T)$  есть гамильтонов путь  $V_1 V_2 \dots V_m$ .

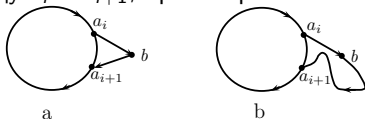
• Так как турнир  $C(T)$  ацикличен,  $V_i V_j \in A(C(T))$  при  $i < j$ . □

## Теорема 4

(Р. Camion, 1959.) В сильно связном турнире существует гамильтонов цикл.

**Доказательство.** • В сильно связном турнире  $T$  есть циклы. Рассмотрим максимальный простой цикл  $C = a_1 a_2 \dots a_k$ . Предположим, что он не гамильтонов, пусть вершина  $b$  не вошла в этот цикл.

• Пусть не все стрелки между  $b$  и циклом  $C$  ориентированы одинаково. Тогда существуют последовательные вершины цикла  $a_i$  и  $a_{i+1}$  такие, что  $a_i b, b a_{i+1} \in A(T)$  (см. рис. а). В этом случае можно удлинить максимальный цикл  $C$ , вставив вершину  $b$  между  $a_i$  и  $a_{i+1}$ , противоречие.



• Пусть из всех вершин цикла  $C$  стрелки входят в  $b$  (если стрелки выходят из  $b$  к  $C$  — аналогично). Ввиду сильной связности турнира  $T$  существует путь  $S$  от  $b$  до цикла  $C$ .

• Пусть  $S$  впервые пересекает цикл  $C$  в вершине  $a_{i+1}$  (см. рис. б). Тогда можно удлинить  $C$ , заменив стрелку  $a_i a_{i+1}$  на путь  $a_i b S a_{i+1}$ . Противоречие.

## Теорема 5

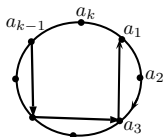
*В сильно связном турнире  $G$  с четырьмя и более вершинами существуют две такие вершины  $a, b \in V(G)$ , что турниры  $G - a$  и  $G - b$  сильно связны.*

**Доказательство.** • По Теореме 4 в турнире  $G$  есть ГЦ  $a_1 a_2 \dots a_k$  (нумерация вершин — циклическая).

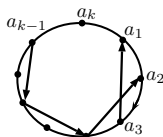
• Если  $a_i a_{i+2} \in A(G)$ , то турнир  $G - a_{i+1}$  сильно связан.

Если таких  $i$  хотя бы два, то теорема доказана.

• Пусть в  $A(G)$  существует не более чем одна стрелка вида  $a_i a_{i+2}$ . Тогда можно предположить, что  $a_{i+2} a_i \in A(G)$  при  $i \neq k$ , а ориентация ребра  $a_k a_{k+2} = a_k a_2$  может быть произвольной.



a



b

• Докажем, что в таком случае орграф  $G - a_k$  сильно связан. Для этого достаточно показать, что существует путь из  $a_{k-1}$  в  $a_1$ . Это несложно: по стрелкам-диагоналям ГЦ существует путь  $a_{k-1}a_{k-3} \dots$ , приходящий, в зависимости от четности  $k - 1$ , в  $a_1$  (рис. a) или в  $a_2$  (рис. b). Во втором случае дополним этот путь участком  $a_2a_3a_1$ .

• Так как Таким образом турнир  $G - a_k$  сильно связан. Отметим, что мы не пользовались при этом рёбрами  $a_k a_2$  и  $a_k a_{k-2}$ , их ориентация не имеет для нас значения. Поэтому аналогично доказывается, что турнир  $G - a_2$  сильно связан.





## Теорема 6

**(J. W. Moon, 1966.)** Пусть  $G$  — сильно связный турнир, а  $k \in \mathbb{N}$ ,  $3 \leq k \leq v(G)$ . Тогда выполнены следующие утверждения.

- 1) Для любой вершины  $v \in V(G)$  существует простой цикл длины  $k$ , проходящий через  $v$ .
- 2) В турнире  $G$  существует хотя бы  $v(G) + 1 - k$  простых циклов длины  $k$ .

**Доказательство.** • Зафиксируем  $k$  и будем доказывать оба утверждения индукцией по количеству вершин турнира  $G$ . При  $v(G) = k$  оба утверждения следуют из Теоремы 4: в сильно связном турнире  $G$  есть гамильтонов цикл.

- 1) • Пусть  $v(G) > k$ . Тогда по Теореме 5 существует такая вершина  $w \neq v$ , что турнир  $G - w$  сильно связан.  
• Так как  $3 \leq k \leq v(G) - 1 = v(G - w)$ , по индукционному предположению в турнире  $G - w$  есть простой цикл длины  $k$ , проходящий через  $v$ . Этот же цикл есть и в турнире  $G$ .

2) • Пусть  $v(G) > k$ . Тогда по Теореме 5 существует такая вершина  $w$ , что турнир  $G - w$  сильно связан.

• В турнире  $G - w$  существует не менее  $v(G - w) + 1 - k = v(G) - k$  простых циклов длины  $k$ .

• По пункту 1 в турнире  $G$  существует простой цикл длины  $k$ , проходящий через вершину  $w$ , следовательно, в турнире  $G$  не менее чем  $v(G) - k + 1$  простых циклов длины  $k$ . □

- Пусть  $G$  — оргграф. Как и в неориентированном случае,  $\alpha(G)$  — количество вершин в максимальном *независимом* множестве вершин оргграфа  $G$  (то есть, максимальном множестве вершин, никакие две из которых не соединены стрелкой).

### Теорема 7

(V. Chvatal; L. Lovasz, 1974.) В любом оргграфе  $G$  существует такое *независимое* множество  $S \subset V(G)$ , что для любой вершины  $v \in V(G) \setminus S$  существует путь длины не более 2 с началом в  $S$  и концом в  $v$ .

**Доказательство.** Доказательство будет индукцией по количеству вершин в оргграфе. База при  $v(G) = 1$  очевидна.

- **Индукционный переход.** Пусть для меньших оргграфов утверждение доказано. Рассмотрим любую вершину  $v \in V(G)$ . Если  $V(G) = \{v\} \cup N_G^+(v)$ , то утверждение теоремы очевидно, нам подходит  $S = \{v\}$ .



## Теорема 8

**(B. Roy, 1967; T. Gallai, 1968)** Пусть  $G$  — неориентированный граф,  $\vec{G}$  — его ориентация. Тогда орграф  $\vec{G}$  содержит путь длины не менее  $\chi(G) - 1$ .

**Доказательство.** • Пусть  $A \subset A(\vec{G})$  — минимальное по включению такое множество стрелок, что орграф  $G' = \vec{G} - A$  — ациклический.

• Для любой вершины  $v \in V(G)$  положим  $\rho(v)$  равным длине наибольшего простого пути в орграфе  $G'$  с началом в  $v$ . Покажем, что  $\rho$  — правильная раскраска вершин графа  $G$ .

### Утверждение

Пусть вершины  $a, b \in V(G)$  соединены простым путём  $P$  в орграфе  $G'$ . Тогда  $\rho(a) > \rho(b)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим путь  $P_b$  длины  $\rho(b)$  в орграфе  $G'$ . Так как  $G'$  — ациклический, то любой путь в орграфе  $G'$  — простой. В частности, равный объединению  $P$  и  $P_b$  путь  $P_a$  с началом в  $a$  — простой. Так как  $|P_a| > |P_b|$ , то  $\rho(a) > \rho(b)$ .  $\square$

- *Вернемся к доказательству теоремы 8.*
- Пусть  $x, y \in V(G)$  и  $xy \in E(G)$ . НУО  $xy \in A(\vec{G})$ .  
Если  $xy \in A(G')$ , то, как доказано выше,  $\rho(x) \neq \rho(y)$ .
- Если  $xy \notin A(G')$ , то  $xy \in A$ . Из минимальности  $A$  следует, что в орграфе  $G' + xy$  есть цикл, но тогда в орграфе  $G'$  есть  $yx$ -путь, а следовательно,  $\rho(x) \neq \rho(y)$ .
- Мы доказали правильность раскраски  $\rho$ . Пусть  $k$  — номер наибольшего цвета в  $\rho$ . Тогда в орграфе  $G'$  (а значит, и в  $\vec{G}$ ) есть простой путь длины  $k$ . Поскольку раскраска  $\rho$  красит вершины в цвета  $0, 1, \dots, k$ , то  $\chi(G) \leq k + 1$ . □

## Ядро орграфа и списочные раскраски рёбер

### Определение

Пусть  $H$  — орграф. Независимое множество вершин  $U \subset V(H)$  называется *ядром*, если для любой вершины  $v \in V(H) \setminus U$  существует хотя бы одна стрелка  $vu \in A(H)$ , где  $u \in U$ .

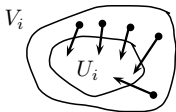
### Лемма 7

Пусть  $H$  — орграф, каждой вершине  $v \in V(H)$  соответствует список цветов  $L(v)$ , причём  $d_H^+(v) < \ell(v)$ . Предположим, что каждый индуцированный подграф орграфа  $H$  имеет ядро. Тогда существует правильная раскраска вершин  $H$  в соответствии с данными списками.

**Доказательство.** • Индукция по  $v(H)$ , база для пустого орграфа очевидна.

• Предположим, что для меньших графов лемма доказана. Пусть  $i$  — цвет, присутствующий в списках,  $V_i \subset V(H)$  — множество из всех вершин, чьи списки содержат цвет  $i$ ,  $H_i = H(V_i)$ .

- По условию, оргграф  $H_i$  имеет ядро  $U_i$ . Покрасим все вершины из  $U_i$  в цвет  $i$  (это не нарушит правильности раскраски, так как ядро является независимым множеством), после чего исключим цвет  $i$  из списков всех вершин  $v \in V_i \setminus U_i$  и получим новые списки  $L'(v)$ .



- Пусть  $H' = H - U_i$ . Поскольку  $U_i$  — ядро орграфа  $H_i = H(V_i)$ , то для любой вершины  $v \in V_i \setminus U_i$  выполняется  $d_{H'}^+(v) \leq d_H^+(v) - 1 < \ell(v) - 1 = \ell'(v)$ .
- По индукционному предположению, вершины орграфа  $H'$  можно покрасить правильным образом по новым спискам, в которых нет цвета  $i$ . В результате получится правильная раскраска всех вершин орграфа  $H$  по спискам.





## Теорема 9

**(F. Galvin, 1995.)** Для любого двудольного графа  $G$  выполняется  $\text{ch}'(G) = \chi'(G) = \Delta(G)$ .

**Доказательство.** • Пусть  $G = (V_1, V_2, E)$ ,  $k = \Delta(G)$ . По теореме 4.8 мы имеем  $\chi'(G) = k$ , то есть, существует правильная раскраска  $\rho$  рёбер графа  $G$  в  $k$  цветов (пусть это цвета  $1, \dots, k$ ).

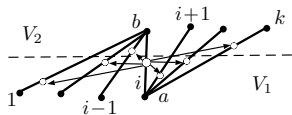
• Обозначим через  $G'$  *рёберный граф* двудольного графа  $G$ . (Вершины  $G'$  соответствуют рёбрам  $G$ . Две вершины  $G'$  смежны, если и только если смежны соответствующие рёбра.)

• Пусть каждому ребру  $e$  графа  $G$  (а значит, и каждой вершине графа  $G'$ ) соответствует список  $L(e)$  из  $k$  цветов. Наша цель — построить правильную раскраску вершин графа  $G'$  по данным спискам. Для этого мы хотим применить к рёберному графу  $G'$  Лемму 7.

• Введём *множество предпочтений* для вершин исходного графа  $G$ . Для вершины  $a \in V_1$  предпочтение  $<_a$  строго упорядочивает инцидентные  $a$  рёбра по возрастанию их цветов в раскраске  $\rho$ , а для вершины  $b \in V_2$ , предпочтение  $<_b$  строго упорядочивает инцидентные  $b$  рёбра по убыванию их цветов в раскраске  $\rho$ .

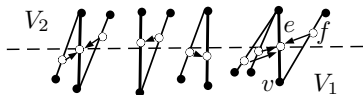
- Мы ориентируем каждое ребро  $ef$  рёберного графа  $G'$  от  $e$  к  $f$ , если для их общей вершины  $v$  рёбер  $e$  и  $f$  имеет место  $e <_v f$ . Тем самым, мы получим ориентацию  $\vec{G}'$  графа  $G'$ .

- По построению множества предпочтений мы имеем  $d_{\vec{G}'}^+(e) \leq k - 1 < \ell(e)$ . (Если  $e = ab$ ,  $a \in V_1$ ,  $b \in V_2$  и  $\rho(e) = i$ , то из  $e$  могут выходить стрелки к инцидентным  $a$  рёбрам цветов  $i + 1, \dots, k$  и к инцидентным  $b$  рёбрам цветов  $1, \dots, i - 1$ , всего не более  $k - 1$  стрелки, см. рис.)



- Остаётся доказать, что у любого индуцированного подграфа  $H'$  орграфа  $\vec{G}'$  есть ядро. Для этого мы воспользуемся теоремой Гэйла-Шепли (Stable Marriage Theorem).

- Пусть  $F$  — множество всех рёбер графа  $G$ , соответствующих вершинам из  $\vec{H}'$ , а  $H = G(F)$ . Для введённого выше множества предпочтений существует стабильное паросочетание  $M$  графа  $H$ . Рёбра из  $M$  образуют независимое множество вершин орграфа  $\vec{H}'$ .



- По определению стабильного паросочетания и по построению ориентации  $\vec{H}'$ , для любого ребра  $f \in F \setminus M$  существует такое ребро  $e \in M$  и общая вершина  $v$  рёбер  $e$  и  $f$ , что  $f <_v e$ , то есть,  $fe \in A(\vec{H}')$ . Таким образом,  $M$  — ядро  $\vec{H}'$ .
- Теперь воспользуемся Леммой 7 и получим, что существует правильная раскраска вершин графа  $G'$  (и, соответственно, рёбер графа  $G$ ) по заданным спискам. Таким образом,  $ch'(G) = k$ .

