Теория графов. Глава 6. Планарные графы.

Д. В. Карпов

29.10 - 12.11.2020

Плоские и планарные графы

Определение

Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались во внутренних точках. Вершины изображаются точками, а рёбра — ломаными. Внутренние точки любой ломаной, изображающей ребро графа, не должны быть вершинами графа.

Определение

Плоским графом (или *плоским изображением*) мы будем называть конкретное изображение планарного графа на плоскости без пересечений и самопересечений рёбер.

- Таким образом, планарному графу могут соответствовать разные плоские графы.

Грань плоского графа

• Изображение плоского графа делит плоскости на части — *грани*. Это ключевой объект для плоского графа, отличающий его от абстрактного планарного графа. Ниже мы дадим формальное определение граней.

• На плоскости изображен плоский граф G. Пусть M — множество всех точек плоскости, не входящих в изображение G.

• Пусть запись $A \sim B$ означает, что точки $A, B \in M$ можно соединить ломаной, не пересекающей изображение графа G. Укажем три важных свойства $\sim$.

• Рефлексивность. $A \sim A$

• Симметричность. Если $A \sim B$, то $B \sim A$.

• Транзитивность. Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

• Отношение $\sim$ с такими свойствами называется *эквивалентностью*.

• *Класс эквивалентности* M_A состоит из всех таких точек $X \in M$, что $X \sim A$.

• *Для любых $X, Y \in M_A$ выполнено $X \sim Y$.*

Доказательство. $Y \sim A \Rightarrow A \sim Y$. Из $X \sim A$, $A \sim Y$ следует $X \sim Y$. □

• *Для любой $X \in M_A$ выполнено $M_X = M_A$.*

Доказательство. Если $Y \in M_X$, то $Y \sim X \sim A$, откуда $Y \in M_A$. Таким образом, $M_X \subset M_A$. Из $X \sim A$ следует $A \sim X$, то есть, $A \in M_X$. Теперь аналогично получаем $M_A \subset M_X$. □

• *Если $A, B \in M$ таковы, что $M_A \cap M_B \neq \varnothing$, то $M_A = M_B$.*

Доказательство. Пусть $X \in M_A \cap M_B$. Тогда $M_A = M_X = M_B$. □

• Таким образом, множество M, состоящее из всех точек плоскости, не лежащих на изображении графа G, оказывается разбито на непересекающиеся классы эквивалентности по $\sim$. Эти классы мы назовем *гранями*.

• Две точки из одной грани графа G могут быть соединены ломаной, не пересекающей изображение G.

• Любая ломаная, соединяющая две точки из разных граней, пересекает изображение G.

Теорема Жордана для замкнутой ломаной

Теорема 1

(C. Jordan, 1887.) *Замкнутая несамопересекающаяся ломаная P делит точки плоскости, не лежащие на P, на две такие части, что выполнены следующие условия:*

(1) *любые две точки из одной части можно соединить ломаной, не пересекающей P;*

(2) *любая ломаная, соединяющая две точки из разных частей, пересекает P.*

Доказательство. • Пусть $P_1 \dots P_m$ — вершины P в порядке обхода по часовой стрелке. Обозначим через M множество всех точек плоскости, не лежащих на P.

• Зафиксируем на прямой вектор ℓ, не параллельный ни одной из сторон P. Из каждой точки $A \in M$ выпустим луч $\ell(A)$ в направлении ℓ.

• В случае, если $\ell(A)$ содержит вершину P_i многоугольника P, но стороны $P_{i-1}P_i$ и P_iP_{i+1} лежат в одной полуплоскости относительно содержащей $\ell(A)$ прямой, мы будем говорить, что многоугольник P в вершине P_i *касается* $\ell(A)$.

• Посчитаем число $p(A)$ точек пересечения $\ell(A)$ с P, не являющихся касаниями. Очевидно, что $p(A)$ конечно.

• Часть M_0 будет состоять из всех точек $A \in M$, для которых $p(A)$ четно, а часть M_1 будет состоять из всех точек $B \in M$, для которых $p(B)$ нечетно.

Утверждение

M_0 и M_1 непусты.

Доказательство. • Рассмотрим прямую ℓ_0, параллельную вектору ℓ, и проходящую через внутреннюю точку ломаной P (то есть через, не являющуюся ее вершиной).

• При движении по ℓ_0 в направлении вектора ℓ отметим последнее пересечение с ℓ во внутренней точке — пусть это точка X.

• Рассмотрим содержащий X малый отрезок $[Y, Z]$ на этом ℓ_0, не пересекающий P в отличных от X точках, пусть Y лежит перед X при движении в направлении ℓ.

• Тогда $p(Y) = 1$ (единственное пересечение в точке X), а $p(Z) = 0$.

Утверждение

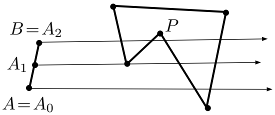
Пусть $A, B \in M$ и отрезок $[A, B]$ не пересекает P. Тогда $p(A)$ и $p(B)$ имеют одинаковую четность. В частности, выполнено условие (2).

Доказательство. • Если $AB \parallel \ell$, то утверждение очевидно.

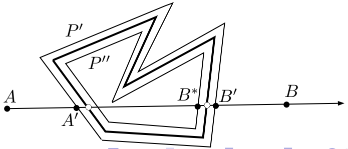
• Если нет, то отметим на отрезке AB все такие точки $A_1, \dots, A_k$ в направлении от A к B, что $\ell(A_i)$ касается P (если они есть). Положим $A_0 = A$ и $A_{k+1} = B$.

• Тогда для каждого $i \in [0..k]$, все точки отрезка $[A_i, A_{i+1}]$ имеют, очевидно, одинаковое значение функции p, а при переходе на соседний отрезок функция p может иметь четный скачок (каждое касание $\ell(A_i)$ многоугольника P добавляет точкам с одной стороны от A_i двойку к количеству пересечений, см. рис. a).

• В любом случае, на всем отрезке $[A, B]$ функция p имеет одинаковую четность. $\square$



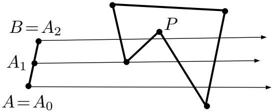
a



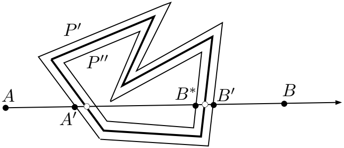
b

Докажем утверждение (1).

• Пусть $A, B \in M_i$. Если отрезок $[A, B]$ не пересекает P, то все понятно. Пусть пересекает, причем A_1 и B_1 — ближайшие к A и B соответственно точки пересечения.



a

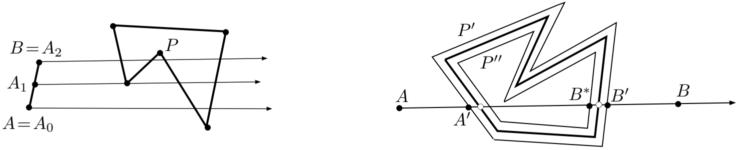


b

• Отметим на отрезке $[A, A_1]$ точку A' очень близко к A_1, а на отрезке $[B_1, B]$ — точку B' очень близко к B_1, пусть $|AA'| = |BB'| = \delta$ (см. рис. b). Тогда $p(A) = p(A')$ и $p(B) = p(B')$.

• Проведем вдоль каждой стороны многоугольника P две параллельных прямых на расстоянии δ с разных сторон, выбрав это число столь малым, чтобы в результате получились два "очень близких" к P многоугольника P' и P'' так, чтобы стороны P и P' не пересекали сторон P. (Достаточно выбрать δ меньше, чем минимальное расстояние от стороны P до вершины, на ней не лежащей.)

• НУО A' лежит на P'. Если и B' лежит на P', то мы построили от A' до B' ломаную, не пересекающую P, тогда такая ломаная построена и от A до B.



a b

• Пусть B' лежит на P'', тогда обозначим через B^* точку пересечения P' с прямой AB, лежащую около B (разумеется, на расстоянии δ).

• Несложно понять, что $p(B^*) - p(B') = \pm 1$ (разница состоит в том, что ровно для одной из этих точек учитывается пересечение в точке B_1).

• Однако применив доказанное выше утверждение, получим $p(B^*) \equiv p(A') \equiv p(A) \equiv p(B) \equiv p(B') \pmod 2$, противоречие. □

Плоскость и сфера

• Плоскость и сфера переводятся друг в друга *стереографической проекцией*.

• Поставим сферу на плоскость, точку касания назовём южным полюсом, противоположную точку — северным полюсом N. Каждая точка $A \neq N$ сферы перейдёт в точку пересечения плоскости и луча NA.

Утверждение

Граф является планарным тогда и только тогда, когда его можно изобразить на сфере без пересечения рёбер во внутренних точках.

Доказательство. • Переводя изображение графа со сферы на плоскость нужно лишь выбрать северный полюс так, чтобы он не совпадал ни с одной из вершин графа и не попадал на рёбра. □

• Плоское изображение планарного графа ограничено (его можно поместить в большой круг).

• Поэтому в плоском изображении планарного графа есть ровно одна неограниченная *внешняя грань*, которая визуально сильно отличается от всех остальных, а в сферическом изображении такой грани нет.

• Грань сферического изображения графа, содержащая северный полюс будет соответствовать при стереографической проекции внешней грани плоского изображения.

• Таким образом, перемещая северный полюс на разные грани, можно любую грань сферического изображения сделать внешней гранью в плоском изображении графа. Это лишний раз подчеркивает, что на самом деле внешняя грань не отличается от остальных.

Граница грани

- Рассмотрим ребро e плоского графа G. Либо по разные стороны от e расположены разные грани (тогда ребро e — *граничное* ребро этих двух граней), либо по обе стороны от e — одна и та же грань, тогда назовем ребро e *внутренним* ребром этой грани. Обозначим через E_d множество всех граничных и внутренних рёбер грани d.
- Граничные и внутренние рёбра грани d — это в точности те рёбра, до которых от внутренней точки грани d можно дойти по ломаной, не пересекая изображение графа.
- *Граничные вершины* грани d — это вершины, до которых можно дойти по ломаной от внутренних точек этой грани, не пересекая её граничных и внутренних рёбер. Обозначим их множество через V_d. Концы рёбер из E_d — это вершины множества V_d.
- *Граница* грани d — это подграф $B(d)$ графа G с множеством вершин V_d и множеством рёбер E_d.
- *Размер границы* грани d мы определим, как количество граничных рёбер этой грани плюс удвоенное количество внутренних рёбер. Обозначать эту величину будем через $b(d)$.

• *Если сложить размеры границ всех граней, получится удвоенное количество рёбер.*

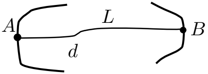
Доказательство. Внутреннее ребро грани два раза считается в размере границы этой грани. Граничное ребро двух граней по разу считается в их размерах. □

• *Любые две точки на границе грани d можно соединить ломаной, проходящей в d.*

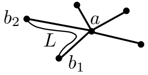
Доказательство. Пусть A — внутренняя точка грани d. От нее можно провести ломаные, не пересекающие изображение G до любых двух граничных. Все точки на этих ломаных лежат в d. □

• *Если две точки A и B на изображении графа G можно соединить ломаной L, не пересекающей изображения G, то A и B лежат на границе некоторой грани.*

Доказательство. A и B лежат на границе грани d, содержащей все внутренние точки L (см. рисунок а). □



a



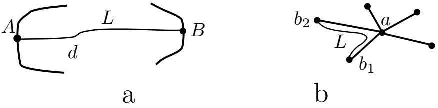
b

Определение

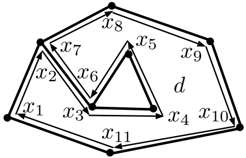
Рассмотрим любую вершину a плоского графа G и упорядочим выходы ребер из a по часовой стрелке. Два ребра, выходы которых — соседние в этом порядке, будем называть *соседними в вершине a*.

• *Пусть ab_1 и ab_2 — два соседних ребра в вершине a. Тогда рёбра ab_1 и ab_2 лежат в границе некоторой грани.*

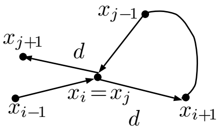
Доказательство. вершины b_1 и b_2 можно соединить ломаной вдоль b_1ab_2, не пересекающей изображения G (см. рисунок b). Поэтому, рёбра ab_1 и ab_2 лежат в границе некоторой грани. □



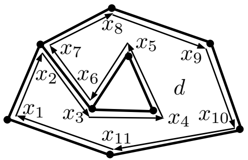
- Пусть G — плоский граф, $d \in F(G)$, а $x_1x_2 \in E_d$.
- Пройдем по ребру x_1x_2 от x_1 к x_2. НУО справа по ходу движения расположена грань d. Повернем в вершине x_2 направо до выхода соседнего ребра x_2x_3. (Если $d_G(x_2) = 1$, то $x_3 = x_1$, это нам не мешает.) Очевидно, $x_2x_3 \in E_d$. Пойдем по этому ребру от x_2 к x_3, справа опять будет расположена грань d. И так далее. В конечном итоге мы вернемся на ребро x_1x_2 (в вершину x_1 мы можем вернуться и раньше!). Получился замкнутый циклический маршрут (см. рис. a).



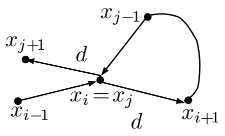
a



b



a

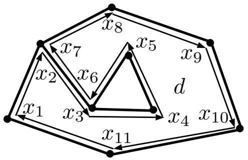


b

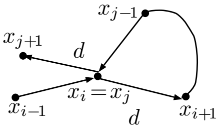
- Пусть получился циклический маршрут $Z = x_1 x_2 \dots x_k$. Рассмотрим вершину x_i. по построению, Z обходит вокруг x_i — скажем, против часовой стрелки. Пусть мы вышли из вершины x_i по ребру $x_i x_{i+1}$, а следующий раз вернулись в эту вершину по ребру $x_{j-1} x_j$ (в этом случае $x_i = x_j$, см. рис. b).

- Тогда сектор между выходами рёбер $x_i x_{i+1}$ и $x_j x_{j-1}$ из вершины $x_i = x_j$ не принадлежит грани d. Следовательно, Z проходит все рёбра из E_d, инцидентные вершине x_i. Поскольку это верно для любой вершины Z, этот маршрут обходит все рёбра одной из компонент графа $B(d)$.

- Обозначим через $Z(U)$ такой маршрут для компоненты U, а через $Z(d)$ — объединение построенных маршрутов для всех компонент $B(d)$.



a



b

• Если маршрут $Z(d)$ проходит ребро e дважды, то, очевидно, в разных направлениях. Значит, по обе стороны от e расположена грань d, то есть e — внутреннее ребро d.

• Пусть e — внутреннее ребро грани d (см. ребро $x_2x_3 = x_6x_7$ на рисунке). Тогда при проходе по e в любом из направлений справа будет расположена грань d. Поэтому, маршрут $Z(d)$ дважды пройдет e — в обоих направлениях.

Лемма 1

Для плоского графа G выполнены следующие утверждения.

1) *Если $d \in F(G)$ и $B(d)$ несвязна, то разные компоненты связности графа $B(d)$ лежат в разных компонентах связности графа G.*

2) *Граф G несвязен, если и только если он имеет грань с несвязной границей.*

Доказательство. 1) • Пусть B_1 и B_2 — две компоненты $B(d)$. Изображение компоненты B_1 ограничено и не пересекает других компонент $B(d)$. Следовательно, изображение B_1 можно отделить от изображения B_2 замкнутой ломаной в грани d, не пересекающей ребер G (такую ломаную можно построить, почти повторив маршрут $Z(B_1)$: вместо каждого прохода по ребру, проведем его копию на малом расстоянии δ в грани d, как в доказательстве теоремы Жордана).

• Значит, между B_1 и B_2 нет пути в графе G.

2) Очевидно, можно обойти все грани графа G, каждый раз переходя в грань имеющую с предыдущей общую сторону или вершину (достаточно отметить по внутренней точке на каждой грани и проложить на плоскости маршрут, все эти точки обходящий).

• Тогда, если граница каждой грани связна, то связно и их объединение, а это граф G, противоречие. Значит, несвязный граф имеет грань с несвязной границей.

• Если G имеет грань с несвязной границей, то G несвязен по пункту 1. $\square$

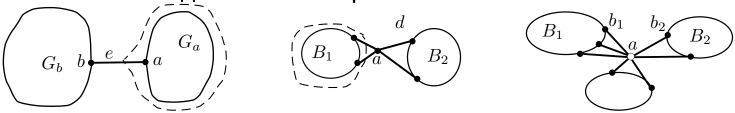
Лемма 2

Внутренние рёбра граней плоского графа G — в точности все мосты графа G.

Доказательство. • Пусть внутреннее ребро e грани d — не мост, тогда оно лежит в простом цикле C. По теореме Жордана цикл делит плоскость на две области, а грань d может лежать только в одной из них.

• Наоборот, пусть $e = ab$ — мост. Тогда граф $G - e$ имеет две компоненты G_a и G_b, содержащие a и b соответственно.

• Изображение компоненты G_a ограничено и не пересекает G_b, значит, существует замкнутая ломаная P в грани d, отделяющая G_a от G_b (см. рис. а). Очевидно, P пересекает ребро e, а значит, по обе стороны от моста e расположена одна и та же грань. $\square$



a b c

Лемма 3

Пусть d — грань реберно двусвязного графа G. Тогда $B(d)$ — цикл (не обязательно простой).

Доказательство. • Так как G связен, $B(d)$ — связный граф по Лемме 1. Значит, и $Z(d)$ связен. Так как внутренних рёбер у d нет (граф не имеет мостов), $Z(d)$ — цикл. $\square$

Лемма 4

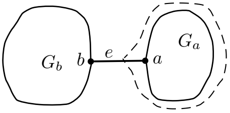
Пусть G — плоский граф.

1) *Если грань d и ее граничная вершина a таковы, что B_1 и B_2 — разные компоненты графа $B(d) - a$, то B_1 и B_2 лежат в разных компонентах графа $G - a$. В частности, a — точка сочленения графа G.*

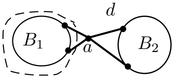
2) *Граф G без петель вершинно двусвязен, если и только если границы его граней — простые циклы.*

Доказательство. 1) Аналогично доказательству Леммы 1, плоское изображение B_1 можно отделить от изображения B_2 ломаной, не пересекающей ребер $G - a$ (см. рис. b), а значит, между B_1 и B_2 нет рёбер в графе $G - a$.

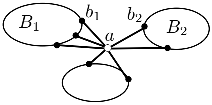
- Следовательно, a — точка сочленения графа G.



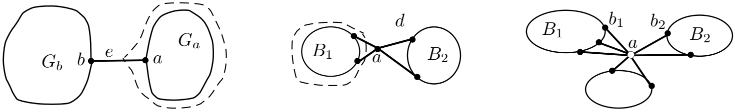
a



b



c



a b c

2) • Пусть a — точка сочленения графа G. Рассмотрим плоское изображение несвязного графа $G - a$, полученное из G удалением вершины a.

• В силу Леммы 1 граф $G - a$ имеет несвязную грань d, а граф G не имеет. Значит, a лежит на грани d и смежна со всеми компонентами ее границы.

• Упорядочим выходы ребер из a по часовой стрелке. Тогда есть два соседних ребра, выходящих к разным компонентам графа $B(d)$ — скажем, ребро ab_1 к компоненте B_1 и ребро ab_2 к компоненте B_2 (см. рис. c).

• Точка сочленения a отделяет b_1 от b_2 в графе G. Существует грань f графа G, граница которой содержит a, b_1 и b_2. Тогда a — точка сочленения $B(f)$.

• Наоборот, если грань d такова, что $B(d)$ имеет точку сочленения, то по пункту 1 граф G также имеет точку сочленения.

Формула Эйлера

• В разных плоских изображениях планарного графа G могут получаться разные грани. Однако их количество является инвариантом графа, как говорит нам формула Эйлера.

Теорема 2

(L. Euler, 1752.) *Пусть G — плоский граф с v вершинами, e рёбрами и f гранями, имеющий k компонент связности. Тогда $v - e + f = 1 + k$.*

Доказательство. Индукцией по количеству рёбер.

База для случая, когда граф G — лес, очевидна: в этом случае $f = 1$, $e = v - k$.

Переход • Пусть для меньших графов формула Эйлера уже доказана и G — не лес.

• Тогда в графе есть цикл, пусть ребро ℓ входит в цикл. Так как ℓ — не мост, по ребру ℓ граничат две разные страны, которые объединяются в одну в графе $G - \ell$.

• Таким образом, в графе $G - \ell$ v вершин, k компонент, $e - 1$ ребро и $f - 1$ страна. Теперь формула Эйлера для G следует из формулы Эйлера для $G - \ell$, которая верна по индукционному предположению.

• Мы будем обозначать количество вершин, рёбер и граней плоского графа G буквами v, e и f соответственно.

Следствие 1

Пусть G — планарный граф без петель и кратных рёбер, $v \geq 3$. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) $e \leq 3v - 6$.

2) *Если граф G — двудольный, то* $e \leq 2v - 4$.

Доказательство. 1) • Докажем, что размер границы каждой грани графа G не менее 3. В самом деле, пусть $d \in F(G)$, $b(d) \leq 2$.

• Так как петель и кратных рёбер нет, $B(d)$ не имеет циклов. Следовательно, все рёбра внутренние. Тогда такое ребро всего одно, а значит, $e = 1$ и утверждение очевидно.

• Сумма размеров границ всех граней равна $2e$, а размер каждой границы не менее 3. Следовательно, $2e \geq 3f$ или $f \leq \frac{2e}{3}$.

• Тогда из формулы Эйлера $v - \frac{e}{3} = v - e + \frac{2e}{3} \geq v - e + f \geq 2$, откуда следует доказываемое неравенство.

2) • Докажем, что размер границы каждой грани двудольного графа G не менее 4.

• В самом деле, пусть $d \in F(G)$, $b(d) \le 3$. Поскольку в двудольном графе нет циклов длины 3, и в G нет кратных рёбер, все рёбра внутренние. Тогда такое ребро всего одно, а значит, $e = 1$ и утверждение очевидно.

• Сумма размеров границ всех граней равна $2e$, а размер каждой границы не менее 4. Следовательно, $f \le \frac{e}{2}$.

• Тогда из формулы Эйлера $v - \frac{e}{2} = v - e + \frac{e}{2} \ge v - e + f \ge 2$, откуда следует доказываемое неравенство. □

Следствие 2

Пусть G — планарный граф без петель и кратных рёбер. Тогда $\delta(G) \le 5$.

Доказательство. • В случае $v \le 2$ утверждение очевидно.

• Пусть $v \ge 3$ и при этом $\delta(G) \ge 6$. Тогда $6v \le 2e$, то есть, $e \ge 3v$ — противоречие со Следствием 1. □

Следствие 3

K_5 и $K_{3,3}$ — непланарные графы.

Доказательство. 1) Пусть K_5 планарен. Для этого графа $v = 5$, $e = 10$. По пункту 1 следствия 1 мы имеем $10 = e \le 3v - 6 = 9$, что неверно.

2) Пусть $K_{3,3}$ планарен. Для этого двудольного графа $v = 6$, $e = 9$. По пункту 2 следствия 1 мы имеем $9 = e \le 2v - 4 = 8$, что неверно. $\square$

Рис.: Подразбиение графа.

Определение

Граф H' называется *подразбиением* графа H, если H' может быть получен из H заменой некоторых рёбер на простые пути (каждое заменяемое ребро xy меняется на простой xy-путь). При этом, все добавлямые вершины различны и имеют степень 2.

Следствие 4

1) *Подразбиение графа H планарно, если и только если H планарен.*
2) *Любое подразбиение графа K_5 или $K_{3,3}$ непланарно.*

Доказательство. 1) Изображение как ребра, так и простого пути — ломаная.
2) Следует из пункта 1 и Следствия 3. □

Теорема 3

(K. Kuratowski, 1930) *Граф G (возможно, имеющий кратные рёбра и петли) непланарен, если и только если G имеет подграф, являющийся подразбиением K_5 или $K_{3,3}$.*

Грани трёхсвязного графа

Определение

• Цикл C графа G — *неразделяющий*, если граф $G - V(C)$ связен.

• Цикл C — *индуцированный*, если он не имеет хорд (то есть, является индуцированным подграфом на своем множестве вершин).

Лемма 5

Пусть G — трёхсвязный плоский граф. Тогда множество границ его граней есть в точности множество его неразделяющих индуцированных циклов.

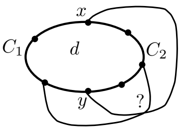
Доказательство. $\Leftarrow$. Пусть C — неразделяющий индуцированный цикл в G. Тогда в одной из областей, на которые C делит плоскость — назовём ее d — нет вершин графа G. Так как индуцированный цикл C не имеет диагоналей, внутри d рёбер тоже нет. Значит d — грань, а цикл C — её граница.

$\Rightarrow$. • Пусть C — граница грани d графа G. Тогда C — простой цикл.

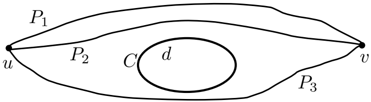
• Предположим, что C имеет диагональ xy. Вершины x и y делят цикл C на две дуги C_1 и C_2.

• Граф $G - x - y$ должен быть связен ввиду трёхсвязности графа G. Значит, в $G - x - y$ есть C_1C_2-путь P.

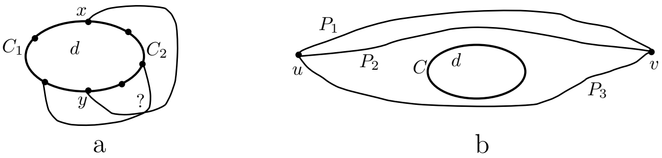
• Понятно, что и диагональ xy, и путь P должны проходить вне грани d, но тогда они пересекаются (см. рис. a), что невозможно.



a



b



• Докажем, что граф $G - V(C)$ связен.

• Пусть $u, v \in V(G) \setminus V(C)$. По теореме Уитни в трёхсвязном графе G существуют три независимых uv-пути P_1, P_2 и P_3, которые делят плоскость на три области.

• Грань d лежит в одной из этих областей, пусть это область, граница которой образована путями P_2 и P_3 (см. рис. b). Тогда P_1 не пересекается с границей грани d — циклом C — а значит, вершины u и v связаны в $G - V(C)$.

• Таким образом, граница грани графа G является индуцированным неразделяющим циклом. $\square$

Разные изображения одного графа. Изоморфизм

• Слева и справа на рисунке — плоские изображения одного и того же графа. Но это разные изображения! У правого изображения есть грань, в границе которой 6 вершин, а у левого — нет.

Определение

Пусть G и G' — два плоских графа, а биекция $\varphi : V(G) \to V(G')$ удовлетворяет следующим условиям.

(1) $xy \in E(G) \iff \varphi(x)\varphi(y) \in E(G')$;

(2) $U \subset V(G)$ является множеством граничных вершин некоторой грани графа G, если и только если $\varphi(U) = \{\varphi(x) : x \in U\}$ является множеством граничных вершин некоторой грани графа G'.

Тогда φ — *изоморфизм плоских графов* G и G', а сами эти плоские графы *изоморфны*.

Теорема 4

(H. Whitney, 1933.) *Любые два плоских изображения трёхсвязного графа G изоморфны как плоские графы.*

Доказательство. • Пусть G_1 и G_2 плоские изображения G, причем $x_1 \in V(G_1)$ и $x_2 \in V(G_2)$ — изображения вершины $x \in V(G)$.

• Определим отображение $\varphi : V(G_1) \to V(G_2)$ так: $\varphi(x_1) = x_2$ для любой вершины $x_1 \in V(G_1)$. Очевидно, $x_1y_1 \in E(G_1) \iff xy \in E(G) \iff \varphi(x_1)\varphi(y_1) = x_2y_2 \in E(G_2)$.

• По лемме 5 границы граней плоского графа G_1 — это в точности неразделяющие индуцированные циклы графа G_1, а границы граней плоского графа G_2 — это в точности неразделяющие индуцированные циклы G_2. Это свойство не имеет отношения к плоскому изображению.

• $U_1 \subset V(G_1)$ — множество вершин неразделяющего индуцированного цикла в G_1 (то есть, границы грани G_1) $\iff$ $U \subset V(G)$ множество вершин неразделяющего индуцированного цикла в G $\iff$ $\varphi(U_1) = U_2 \subset V(G_2)$ — множество вершин неразделяющего индуцированного цикла в G_2 (то есть, границы грани G_2).

• Следовательно, φ — изоморфизм плоских графов.

Триангуляции

Определение

1) Будем называть грань *треугольником*, если ее граница — это треугольник.
2) Плоский граф называется *триангуляцией*, если каждая его грань — треугольник. Кратные рёбра и петли запрещены.
3) *Триангулировать* плоский граф значит провести в нём дополнительные рёбра так, чтобы получилась триангуляция.

- По Лемме 4 триангуляция — двусвязный граф.

Лемма 6

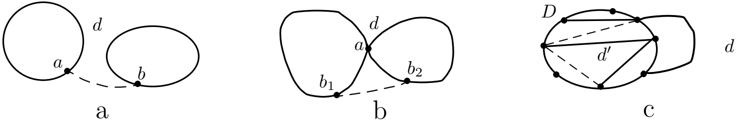
Пусть G — плоский граф без петель и кратных рёбер, $v(G) \geq 3$. Тогда G можно триангулировать.

Доказательство. Пусть G — не триангуляция. Рассмотрим три случая и в каждом из них объясним, как добавить ребро.

Случай 1: G несвязен.

• По Лемме 1 граф G имеет грань d с несвязной границей. Две вершины a и b из разных компонент связности $B(d)$ можно соединить ребром в грани d.

• По Лемме 1 вершины a и b лежат в разных компонентах связности графа G, поэтому $ab \notin E(G)$ (см. рис. a, здесь грань d — внешняя).



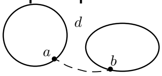
Случай 2: G имеет точку сочленения a.

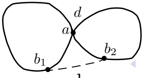
• По Лемме 4 граф G имеет грань d, у границы которой есть точка сочленения a. Две вершины b_1 и b_2 из разных компонент связности $B(d) - a$ можно соединить ломаной в грани d, не пересекающей изображение G.

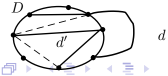
• По Лемме 4 $ab \notin E(G)$, и это ребро можно добавить в грани d (см. рис. b, здесь грань d — внешняя).

Случай 3: G двусвязен.

- Пусть грань d — не треугольник. По Лемме 4 граница грани d — простой цикл D длины $k \geq 4$.
- НУО d — внешняя область цикла D. Предположим, что во внутренней области d' проведены какие-либо диагонали цикла D — назовем их *красными* (см. рис. справа, сплошные линии внутри цикла).
- Красные диагонали не пересекаются. Они разбивают d' на меньшие области, в каждой из которых не менее трёх вершин. Если в какой-то из них более трёх вершин, мысленно триангулируем ее новыми красными диагоналями произвольно (пунктирные линии внутри цикла на рис. справа).
- Теперь красных диагоналей ровно $k-3$ (несложно понять, что k-угольник триангулируется ровно на $k-2$ треугольника $k-3$ диагоналями).
- Так как есть $\frac{k(k-3)}{2}$ диагоналей D, можно провести в d, концы которой не совпадают с красной диагональю, в результате количество рёбер увеличится и не получится кратных рёбер. □







• Пусть у триангуляции T $2n$ граней, тогда у нее $3n$ рёбер. По формуле Эйлера $v = n + 2$. Тогда $e(T) = 3v(T) - 6$.

• Мы знаем, что для любого плоского графа G выполнено $e(G) = 3v(G) - 6$. Таким образом, триангуляция — максимальный плоский граф, в котором нельзя дорисовать без пересечений ни одного нового ребра.

Лемма 7

В любой триангуляции T есть ребро e, входящее ровно в два треугольника — в две грани, граничащие по e.

Доказательство. • Любое ребро $f \in E(T)$ входит в две грани, и эти грани граничат только по f (иначе в T есть пара кратных рёбер). Значит, нам достаточно найти ребро e, не входящее в *разделяющий* треугольник — такой, что в обеих частях плоскости относительно него есть вершины графа.

• Если в T нет разделяющего треугольника, то утверждение очевидно — нам подойдет любое ребро.

• Предположим, что разделяющие треугольники есть и рассмотрим такой разделяющий треугольник abc, что внутри него нет других разделяющих треугольников.

• Однако внутри abc есть вершины а значит, есть и ребро e. Тогда ребро e не может входит в разделяющий треугольник, так как такой треугольник содержался бы внутри abc, что противоречит выбору abc. □

Изображение с прямыми рёбрами

Теорема 5

(K. Wagner, 1936.) *Пусть G — планарный граф без кратных рёбер. Тогда существует плоское изображение G, в котором все рёбра – отрезки.*

Доказательство. • Будем доказывать утверждение индукцией по количеству вершин графа, база для графа на одной вершине очевидна.

• Достаточно доказать теорему для случая, когда G — триангуляция, так как по Лемме 6 любой граф можно триангулировать без появления кратных рёбер. Будем доказывать, что можно выпрямить триангуляцию, тогда будет выпрямлен и исходный граф.

• По Лемме 7 выберем ребро $e = uv \in E(G)$ так, чтобы оно входило ровно в два треугольника — грани xuv и yuv.

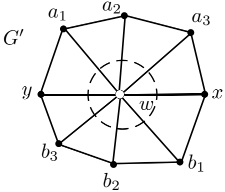
• Тогда $G' = G \cdot uv$ — триангуляция с плоским изображением, в котором "сжаты" грани xuv и yuv, а остальные грани — такие же, как в G. Кратных рёбер в G' нет.

• По индукционному предположению, существует изображение G' с прямыми рёбрами. Далее рассматриваем его.

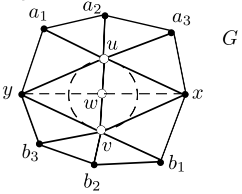
• Упорядочим вершины из $\mathrm{N}_G(u)$ в порядке выхода их рёбер из u по часовой стрелке: $x, v, y, a_1, \dots, a_k$. Так как G – триангуляция, любые две соседние в этом порядке вершины вместе с u образуют треугольную грань.

• Упорядочим вершины из $\mathrm{N}_G(v)$ в порядке выхода их рёбер из v по часовой стрелке: $y, u, x, b_1, \dots, b_m$. Так как G – триангуляция, любые две соседние в этом порядке вершины вместе с v образуют треугольную грань.

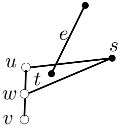
• Тогда в графе G' вершины из $\mathrm{N}_{G'}(w)$ будут упорядочены по часовой стрелке в порядке выходов рёбер из w так: $y, a_1, \dots, a_k, x, b_1, \dots, b_m$ (рис. a). Любые две соседние (по выходу ребра из w) вершины образуют вместе с w треугольную грань.



a



b



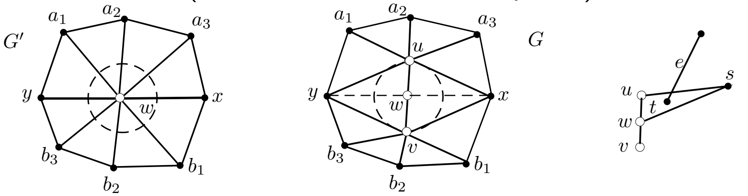
c

• Найдем минимум расстояний между вершинами в G', а также минимум расстояний от вершин до не инцидентных им рёбер (напомним, что рёбра — это отрезки). Пусть d — наименьший из этих минимумов. Очевидно, $d > 0$.

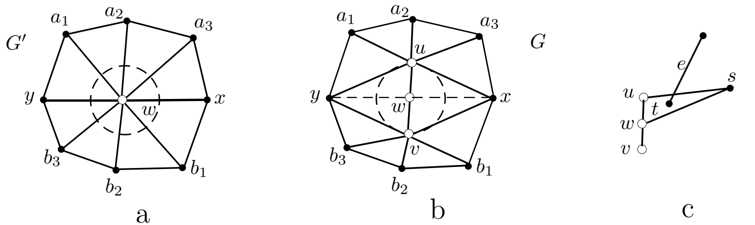
• Проведем окружность S радиуса $\delta = \frac{d}{2}$ с центром w. Понятно, что внутри S вершин графа G' нет и пересекают эту окружность только рёбра с концом в w.

• Ломаная xwy делит многоугольник $P = xa_1 \dots a_k y b_1 \dots b_m$ на два многоугольника: P_a, содержащий $a_1, \dots, a_k$ и P_b, содержащий $b_1, \dots, b_m$.

• Проведем диаметр uv окружности S так, чтобы x и y лежали по разную сторону от соответствующей прямой и u лежала в P_a (тогда v лежит в P_b, см. рис. b).



a b c



• Удалим все рёбра, инцидентные w, из графа. Теперь проведем отрезки от u до x, y, $a_1, \dots, a_k$ и от v до x, y, $b_1, \dots, b_m$ (см. рис. b). Очевидно, никакие два проведенных отрезка не пересекают друг друга.

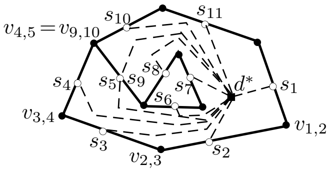
• Остается доказать, что проведенные отрезки не пересекают других рёбер графа G.

• Пусть, скажем, ребро us пересекает какое-то другое ребро e (см. рис. c). Стороны sw и wu треугольника swu не могут пересекать e. Следовательно, один из концов e — назовем его t — лежит в треугольнике swu. Но тогда t лежит в L и расстояние от t до отрезка sw, очевидно, меньше $|uw| = \frac{\delta}{2}$, противоречие.

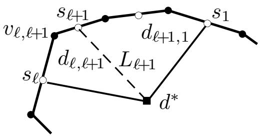
Лемма 8

Пусть G — связный плоский граф, $d \in F(G)$, Пусть $k = b(d)$, а $e_1 \dots e_k$ — рёбра из E_d в порядке циклического обхода $Z(d)$ (нумерация — циклическая по модулю k, внутренние рёбра грани d встречаются в этой нумерации дважды).

Отметим точку d^* на грани d и по точке s_i на каждом ребре e_i. Тогда в грани d можно провести ломаные $L_1, \dots, L_k$ без общих внутренних точек, соединяющие d^* с $s_1, \dots, s_k$ соответственно. При этом, циклический порядок выходов ломаных в точке d^* будет $L_1, \dots, L_k$ (см. рис. а).



a



b

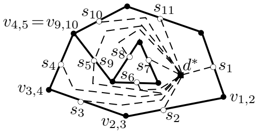
Доказательство. Рассмотрим отдельно от всего графа грань d и добавим вершины $s_1, \dots, s_k, d^*$.

• Внутреннюю точку d^* грани d можно соединить ломаной L_1 в грани d с точкой s_1 на границе грани. Далее пусть $k \geq 2$.

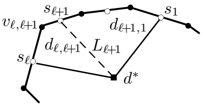
• Так как добавленное ребро $L_1 = d^*s_1$ — мост, это внутреннее ребро полученной грани d_0, в границу которой добавилась вершина d^*.

• Пусть $v_{i,i+1}$ — вершина, в которой обход $Z(d)$ переходит с ребра e_i на ребро e_{i+1}.

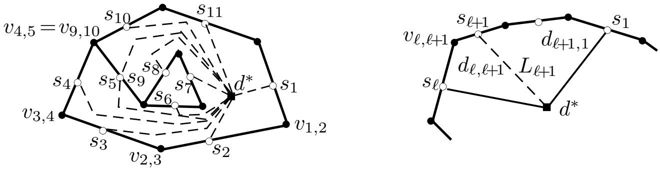
• Докажем индукцией по $2 \leq \ell \leq k$, что можно провести в грани d описанные выше ломаные $L_1, L_2, \dots, L_\ell$ так, что грань d будет разбита на грани $d_{1,2}, \dots, d_{\ell,1}$, причем границу $d_{i,i+1}$ образуют ломаные L_i и L_{i+1}, а также участок циклического обхода $Z(d)$ между s_i и s_{i+1}, содержащий $v_{i,i+1}$. Границу грани $d_{\ell,1}$ образуют ломаные L_i и L_1, а также участок циклического обхода $Z(d)$ между s_ℓ и s_1, содержащий $v_{\ell,\ell+1}$.



a



b



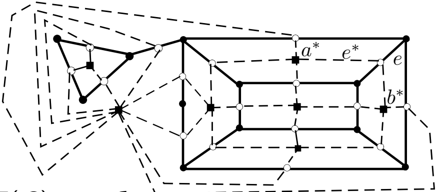
a b

База для $\ell = 2$ очевидна — в грани d_0 можно провести ломаную L_2, соединяющую граничные точки d^* и s_2. В результате ломаная L_2L_1 разобьет d на две части $d_{1,2}$ и $d_{2,1}$, очевидно, обладающие нужными свойствами.

Переход $\ell \to \ell + 1$. Рассмотрим грань $d_{\ell,1}$. На ее границе лежат точки d^* и s_{l+1}, которые можно соединить в грани $d_{\ell,1}$ ломаной L_{i+1} (см. рис. b). В результате грань $d_{\ell,1}$ будет разбита этой ломаной на две грани $d_{\ell,\ell+1}$ $d_{\ell+1,1}$ с нужными свойствами. □

Двойственный граф

- Пусть G — связный плоский граф. Вершины *двойственного графа* G^* будут соответствовать граням графа G: внутри каждой грани a графа G мы отметим соответствующую ей вершину a^* графа G^*. Будем говорить, что вершина a^* *двойственна* грани a.
- Зафиксируем на каждом ребре графа G по точке, которую назовём *серединой* этого ребра. Точку a^* можно соединить внутри грани a непересекающимися ломаными с серединами всех входящих в границу грани a рёбер, как описано в Лемме 8 (см. рис.). Сделаем так для каждой грани графа G.



- Пусть $e \in E(G)$ — ребро, по которому граничат две грани a и b графа G (возможно, $a = b$). Ему будет соответствовать ребро e^* двойственного графа G^*, соединяющее двойственные граням a и b вершины a^* и b^* и проходящее через середину ребра e. Назовём ребро e^* *двойственным* к e.

- Если грани a и b совпадают (или, что равносильно, ребро e — мост), то e^* — петля.
- Вершины $a^*, b^* \in V(G^*)$ оказываются соединены таким количеством рёбер, сколько общих рёбер имеют границы граней a и b.
- Таким образом, существует естественная биекция между рёбрами G и рёбрами G^* (каждому ребру графа G ставится в соответствие двойственное). Следовательно, $e(G) = e(G^*)$.
- Граф G^* зависит не только от графа G, но и от изображения этого графа на плоскости, потому мы определяем G^* для плоского графа G. Для разных плоских изображений одного планарного графа могут получиться неизоморфные двойственные графы.
- Двойственный граф не зависит ни от того, какие точки мы выберем внутри граней исходного графа G, ни от того, какие точки мы назовем серединами рёбер. Нетрудно доказать, что получатся изоморфные плоские графы.

• Итак, вершины графа G^* соответствуют граням графа G, а рёбра графа G^* соответствуют рёбрам графа G. Чему в G соответствуют грани G^*?

Лемма 9

Пусть G — связный плоский граф. Тогда существует биекция между $V(G)$ и $F(G^*)$, которая ставит в соответствии каждой вершине $a \in V(G)$ грань $a^* \in F(G^*)$, содержащую a.

Доказательство. • Рассмотрим грань $a^* \in F(G^*)$ и докажем, что на ней изображена хотя бы одна вершина графа G.

• Рассмотрим ребро $e^* \in E_{a^*}$. По построению его пересекает ребро e графа G. Следовательно, часть изображения ребра e лежит в грани a^*. По построению e пересекает ровно одно ребро графа G^* и ровно один раз, следовательно, хотя бы один конец e (а это вершина графа G) лежит в a^*.

• Нам известно, что $f(G) = v(G^*)$, $e(G) = e(G^*)$. По формуле Эйлера, $v(G) + f(G) - e(G) = 2 = v(G^*) + f(G^*) - e(G^*)$, откуда следует, что $f(G^*) = v(G)$.

• Значит, на каждой грани a^* плоского графа G^* лежит ровно одна вершина графа G, которую мы и обозначим через a. □

В обозначениях Леммы 9 мы будем говорить, что вершина $a \in V(G)$ и грань $a^* \in F(G^*)$ *двойственны* друг другу.

Раскраски карт

• Карта — связный плоский граф без мостов. Его грани иногда называют *странами*.

• Раскраска граней плоского графа G называется *правильной*, если две грани, имеющие общее ребро, покрашены в разные цвета.

• Для плоского графа G мы будем обозначать через $\chi^*(G)$ минимальное количество цветов, для которого существует правильная раскраска граней графа G.

• Нетрудно понять, что правильные раскраски граней плоского графа G взаимно однозначно соответствуют правильным раскраскам вершин двойственного графа G^*. Поэтому $\chi^*(G) = \chi(G^*)$ и $\chi(G) = \chi^*(G^*)$.

• **Гипотеза четырёх красок. (F. Guthrie, 1852.)** Страны любой карты можно правильным образом покрасить в 4 цвета.

• 4CC эквивалентна следующему утверждению: $\chi(G) \le 4$ для любого планарного графа G без петель.

Теорема о 5 красках

Теорема

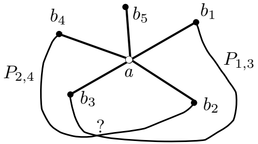
(F. Kempe, 1879.) *Для любого планарного графа G $\chi(G) \le 5$.*

Доказательство. • Индукция по $v(G)$, база для случая $v(G) \le 5$ очевидна. По Следствию 2 граф G имеет вершину a степени не более 5.

• Граф $G - a$ также планарен и по индукционному предположению мы знаем, что $\chi(G - a) \le 5$. Пусть ρ — правильная раскраска вершин $G - a$ в 5 цветов.

• Если вершины из $\mathrm{N}_G(a)$ покрашены не более чем в 4 цвета, мы можем докрасить вершину a и получить правильную раскраску вершин G.

• Остается случай, когда ρ красит $\mathrm{N}_G(a)$ в 5 цветов. Тогда $d_G(a) = 5$, пусть $\mathrm{N}_G(a) = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, причем соседи упорядочены по выходу рёбер из a (по часовой стрелке). Не умаляя общности, можно считать, что $\rho(a_i) = i$ для всех $i \in [1..5]$.



• Пусть $G_{1,3}$ — индуцированный подграф $G - a$ на вершинах цветов 1 и 3, а U — его компонента связности, содержащая b_1. Если во всех вершинах U поменять местами цвета 1 и 3, раскраска останется правильной, а b_1 будет покрашена в цвет 3.

• Если в новой раскраске невозможно докрасить вершину a, в ее окрестности должен остаться цвет 1 — но в него может быть покрашена только вершина b_3 и только в случае $b_3 \in U$.

• Значит, достаточно рассмотреть случай, когда вершины b_1 и b_3 соединены путём $P_{1,3}$ по вершинам цветов 1 и 3 (см. рисунок).

• Аналогично, достаточно рассмотреть случай, когда вершины b_2 и b_4 соединены путём $P_{2,4}$ по вершинам цветов 2 и 4. Тогда пути $P_{1,3}$ и $P_{2,4}$ должны пересекаться, что, очевидно, невозможно.