Теория графов. Глава 5. Раскраски.

Д. В. Карпов

15-22.10.2020

Хроматическое число

Определение

1) Раскраской вершин графа G в k цветов называется функция $\rho : V(G) \to M$, где $|M| = k$. Раскраска ρ называется правильной, если $\rho(v) \neq \rho(u)$ для любой пары смежных вершин u и v.

2) Через $\chi(G)$ обозначим *хроматическое число* графа G — наименьшее натуральное число, для которого существует правильная раскраска вершин графа G в такое количество цветов.

• Как правило, при разговоре о раскрасках в k цветов мы будем использовать для обозначения цветов числа от 1 до k. В случаях, когда мы используем другие обозначения для цветов, об этом будет сказано.

Лемма 1

Для любого графа G выполняется $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq v(G)$.

Доказательство.

Все вершины одного цвета в правильной раскраске попарно несмежны, то есть образуют независимое множество. $\square$

Лемма 2

Пусть G — связный граф, $\Delta(G) \le d$, причем хотя бы одна из вершин графа G имеет степень менее d. Тогда $\chi(G) \le d$.

Доказательство.

• Индукция по количеству вершин. База для графа, у которого не более d вершин, очевидна.

• Будем считать, что утверждение верно для любого меньшего связного графа с меньшим чем $v(G)$ количеством вершин.

• Пусть $u \in V(G)$ — вершина степени менее d. Рассмотрим граф $G - u$. Пусть $G_1, \dots, G_k$ — компоненты графа $G - u$.

• В каждом из графов $G_1, \dots, G_k$ ввиду связности графа G обязательно есть вершина u_i, смежная в графе G с u.

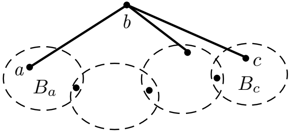
• Тогда $d_{G_i}(u_i) < d$ и $\Delta(G_i) \le d$. По индукционному предположению существует правильная раскраска вершин графа G_i в d цветов.

• Таким образом, существует правильная раскраска вершин в d цветов и у графа $G - u$. Так как $d_G(u) < d$, мы можем докрасить в один из цветов вершину u, не нарушая правильности раскраски графа. $\square$

Лемма 3

Если G — двусвязный неполный граф с $\delta(G) \ge 3$. Тогда существуют такие вершины $a, b, c \in V(G)$, что $ab, bc \in E(G)$, $ac \notin E(G)$ и граф $G - a - c$ связен.

Доказательство. • Пусть G трёхсвязен. Так как G неполный, существуют такие вершины $a, b, c \in V(G)$, что $ab, bc \in E(G)$ и $ac \notin E(G)$. Граф $G - a - c$, очевидно, связен.



• Пусть G не трёхсвязен. Тогда существует такая вершина $b \in V(G)$, что граф $G' = G - b$ не двусвязен.

• Граф G' имеет хотя бы два крайних блока. Так как граф G двусвязен, вершина b должна быть смежна хотя бы с одной внутренней вершиной каждого крайнего блока графа G'. Пусть a и c — смежные с b внутренние вершины двух разных крайних блоков B_a и B_c графа G' соответственно.

• Тогда графы $B_a - a$ и $B_c - c$ связны, откуда легко следует связность графа $G' - a - c$. Так как $d_G(b) \ge 3$, вершина b смежна с $G' - a - c$, а значит, и граф $G - a - c$ связен. $\square$

Теорема Брукса

Теорема 1

(R. L. Brooks, 1941.) *Пусть* $d \geq 3$*, а* G *— связный граф, отличный от* K_{d+1}*,* $\Delta(G) \leq d$*. Тогда* $\chi(G) \leq d$*.*

• При $\Delta(G) = 2$ вопрос о существовании правильной раскраски вершин связного графа G в два цвета очевиден. Такой граф G — либо P_n (путь из n вершин), либо C_n (цикл из n вершин). В первом случае легко видеть, что $\chi(P_n) = 2$, а во втором случае $\chi(C_{2k}) = 2$ и $\chi(C_{2k+1}) = 3$.

Доказательство теоремы 1. • Достаточно рассмотреть случай регулярного графа степени d (иначе воспользуемся леммой 2). Рассмотрим два случая.

Случай 1: в графе G есть точка сочленения a.

• Тогда $G = G_1 \cup G_2$, где $V(G_1) \cap V(G_2) = \{a\}$, а графы G_1 и G_2 связные.

• Так как a смежна хотя быс одной вешиной и в G_1, и в G_2, то $d_{G_1}(a) < d$ и $d_{G_2}(a) < d$. Следовательно, по лемме 1 для каждого $i \in \{1, 2\}$ граф G_i имеет правильную раскраску вершин ρ_i в d цветов.

• Так как цвета в этих раскрасках нумеруются независимо, можно считать, что $\rho_1(a) = \rho_2(a) = 1$.

• Теперь мы можем склеить раскраски ρ_1 и ρ_2 по точке сочленения a и получить правильную раскраску графа G.

Случай 2: G двусвязен.

• По лемме 3 существуют такие $a, b, c \in V(G)$, что $ab, bc \in E(G)$, $ac \notin E(G)$ и граф $G - a - c$ связен.

• Рассмотрим связный граф $G' = G - \{a, c\}$ и остовное дерево T этого графа.

- Сделаем вершину b корнем T и распределим вершины T по уровням (номером уровня будет расстояние до корня b).
- Положим $\rho(a) = \rho(c) = 1$ и будем красить остальные вершины графа G (они же вершины дерева T) в порядке убывания номеров их уровней, начиная с листьев T.
- Пусть $x \neq b$ — очередная вершина, причем на момент ее рассмотрения мы покрасили все вершины больших уровней и не красили вершин меньших уровней.
- Тогда предок вершины x в дереве T еще не покрашен, а значит, покрашено не более, чем $d-1$ соседей вершины x. Мы можем выбрать цвет $\rho(x)$ отличным от всех уже покрашенных соседей вершины x.
- В итоге все отличные от корня b вершины мы покрасим. Рассмотрим b — все ее соседи уже покрашены, причём $\rho(a) = \rho(c)$. Следовательно, существует цвет, в который не покрашен ни один из соседей вершины b. Именно в этот цвет мы покрасим вершину b и получим правильную раскраску вершин графа G в d цветов.

Графы с большим хроматическим числом без треугольников.

Определение

Кликовое число графа G (обозначение: $\omega(G)$) — это количество вершин в наибольшей *клике* (то есть полном подграфе) этого графа.

• Очевидно, $\chi(G) \geq \omega(G)$. Самый простой способ построить граф с большим хроматическим числом — поместить в граф клику большого размера. Однако, граф с большим хроматическим числом может не иметь большой клики.

Теорема 2

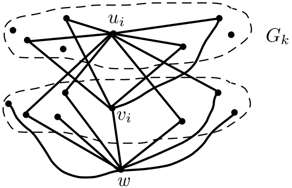
(J. Mycielski, 1955.) *Для любого $k \in \mathrm{N}$ существует граф G, удовлетворяющий условиям $\chi(G) = k$, $g(G) \geq 4$.*

Доказательство. • Для $k = 1$ и $k = 2$ подойдут полные графы K_1 и K_2. Стартуя от графа $G_2 = K_2$, мы построим серию примеров графов $G_3, G_4, \dots$ без треугольников с $\chi(G_k) = k$.

• Пусть построен граф G_k, причём $V(G_k) = \{u_1, \dots, u_n\}$. Этот граф будет частью графа G_{k+1}, в котором будут добавлены вершины $v_1, \dots, v_n, w$.

• Рёбра между новыми вершинами проведёми так: v_i будет смежна со всеми вершинами из $\mathrm{N}_{G_k}(u_i)$ и только с ними, а w — со всеми вершинами $v_1, \dots, v_n$ и только с ними (см. рисунок).

• Понятно, что треугольников в графе G_{k+1} нет.



• Заметим, что $\chi(G_{k+1}) \le k+1$: если ρ — правильная раскраска вершин G_k в k цветов, то можно продолжить её на G_{k+1}, использовав только один дополнительный цвет: положим $\rho(v_i) = \rho(u_i)$, $\rho(w) = k+1$.

• Предположим, что $\chi(G_{k+1}) \le k$, и рассмотрим правильную раскраску ρ вершин графа G_{k+1} в k цветов.

• НУО $\rho(w) = k$. Построим правильную раскраску ρ' вершин графа G_k в $k-1$ цвет и, тем самым, придём к противоречию.

• Для каждой вершины u_i положим $\rho'(u_i) = \rho(u_i)$, если $\rho(u_i) \ne k$, и $\rho'(u_i) = \rho(v_i)$, если $\rho(u_i) = k$.

• Так как вершины $v_1, \dots, v_n$ смежны с вершиной w цвета k, то их цвета отличны от k, следовательно,
$\rho' : V(G_k) \to [1..k-1]$.

• Докажем правильность раскраски ρ'. Предположим противное, пусть $\rho'(u_i) = \rho'(u_j)$, вершины u_i и u_j смежны. Очевидно, хотя бы одна из них перекрашена, пусть это u_i, тогда $\rho'(u_i) = \rho(v_i)$.

• Мы перекрашивали только вершины, имеющие цвет k в раскраске ρ, среди них не было смежных, следовательно, $\rho'(u_j) = \rho(u_j)$. По построению, из $u_j \in \mathrm{N}_{G_k}(u_i)$ следует $u_j \in \mathrm{N}_{G_k}(v_i)$ и мы можем сделать вывод
$\rho'(u_i) = \rho(v_i) \ne \rho(u_j) = \rho'(u_j)$, противоречие с предположением.

• Таким образом, ρ' — правильная раскраска вершин графа G_k, противоречие. Следовательно, $\chi(G_{k+1}) = k+1$. □

Хроматический многочлен

Определение

Для любого натурального числа k обозначим через $\chi_G(k)$ количество правильных раскрасок вершин графа G в k цветов. Функция $\chi_G(k)$ называется *хроматическим многочленом* графа G.

• Таким образом, $\chi_G(\chi(G)) \neq 0$, и $\chi_G(k) = 0$ для любого натурального числа $k < \chi(G)$.

Лемма 4

Пусть G — непустой граф, а $e = uv$ — его ребро. Тогда $\chi_{G-uv}(k) = \chi_G(k) + \chi_{G\cdot uv}(k)$.

Доказательство. • Разобьем правильные раскраски графа $G - e$ в k цветов на два типа: те, в которых вершины u и v одного цвета (тип 1) и те, в которых вершины u и v разных цветов (тип 2).

• Количество раскрасок первого типа равно $\chi_{G\cdot e}(k)$, а количество раскрасок второго типа равно $\chi_G(k)$. $\square$

Теорема 4

Для графа G с $v(G) = n$ $\chi_G(k)$ — многочлен с целыми коэффициентами степени n, старший коэффициент равен 1.

Доказательство. • Мы будем доказывать оба утверждения индукцией по количеству вершин и ребер графа G. А именно, доказывая утверждение для графа G, мы будем считать его справедливым для всех меньших графов.

База для пустого графа $\overline{K}_n$: понятно, что $\chi_{\overline{K}_n}(k) = k^n$, а значит, все утверждения теоремы выполнены.

Переход. Пусть G — непустой граф, а e — его ребро. По лемме 4 $\chi_G(k) = \chi_{G-e}(k) - \chi_{G\cdot e}(k)$.

• Для меньших графов $G \cdot e$ и $G - e$ уже доказаны все утверждения теоремы: $\chi_{G-e}(k)$ — многочлен степени $v(G)$, а $\chi_{G\cdot e}(k)$ — многочлен степени $v(G \cdot e) = v(G) - 1$.

• Старший коэффициент $\chi_G(k)$ равен старшему коэффициенту $\chi_{G-e}(k)$, то есть, 1. $\square$

Хроматический многочлен и компоненты

Теорема 5

Пусть $G_1, \ldots, G_n$ — все компоненты графа G. Тогда

$$\chi_G(k) = \prod_{i=1}^{n} \chi_{G_i}(k).$$

Доказательство.

• При правильной раскраске вершин графа вершины разных компонент можно красить независимо друг от друга.

• Следовательно, произведение количеств правильных раскраскок графов $G_1, \ldots, G_n$ в k цветов есть количество правильных раскрасок вершин графа G в k цветов. $\square$

Хроматический многочлен и блоки

Теорема 6

Пусть G — связный граф с n блоками $B_1, \dots, B_n$. Тогда

$$\chi_G(k) = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} \cdot \prod_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(k).$$

Доказательство. • Докажем утверждение индукцией по количеству блоков в графе G. База для двусвязного графа, который является своим единственным блоком, очевидна.

Переход. Пусть $n \geq 2$. НУО, B_n — крайний блок, содержащий ровно одну точку сочленения (скажем, a).

• В графе $G' = G - \mathrm{Int}(B_n)$ ровно на один блок меньше: исчез блок B_n, остальные блоки не изменились.

• По индукционному предположению для графа G':

$$\chi_{G'}(k) = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-2} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \chi_{B_i}(k).$$

• Остается доказать, что $\chi_G(k) = \frac{1}{k} \cdot \chi_{G'}(k) \cdot \chi_{B_n}(k)$.

• Рассмотрим любую правильную раскраску ρ графа G' в k цветов и попробуем докрасить вершины блока B_n с соблюдением правильности.

• Единственное ограничение, которое накладывается на раскраску блока B_n — зафиксирован цвет вершины a, что уменьшает количество раскрасок блока B_n ровно в k раз.

$\square$

Раскраски рёбер

Определение

1) Раскраской рёбер графа G в k цветов называется функция $\rho : E(G) \to M$, где $|M| = k$. Обычно мы будем использовать для обозначения k цветов в раскраске числа от 1 до k: в случаях, когда $M \neq [1..k]$, об этом будет сказано.

2) Любая раскраска ρ ребер графа G в цвета $[1..k]$ — это разбиение множества $E(G)$ в объединение непересекающихся множеств $E_1, \dots, E_k$, где ρ принимает значение i на рёбрах множества E_i.

• Графы, рассматриваемые в этом разделе могут иметь кратные рёбра, но не имеют петель.

• В отличие от раскрасок вершин, при рассмотрении раскрасок рёбер кратные рёбра играют существенную роль.

Определение

1) Раскраска рёбер ρ называется *правильной*, если $\rho(e) \neq \rho(e')$ для любой пары смежных рёбер e и e'.

2) Через $\chi'(G)$ обозначим *хроматический индекс* графа G — наименьшее натуральное число, для которого существует правильная раскраска рёбер графа G в такое количество цветов.

Определение

Пусть ρ — раскраска рёбер графа G в k цветов.
1) Пусть $v \in V(G)$. Будем говорить, что в раскраске ρ цвет i *представлен* в вершине v, если существует инцидентное v ребро e такое, что $\rho(e) = i$. Обозначим через $\rho(v)$ количество цветов, представленных в вершине v.
2) Введем обозначение $\rho(G) = \sum_{v \in V(G)} \rho(v)$. Назовем раскраску ρ *k-оптимальной*, если для любой другой раскраски ρ' рёбер графа G в k цветов $\rho(G) \geq \rho'(G)$.

• Пусть ρ — правильная раскраска рёбер графа G в не более чем k цветов. Тогда для каждой вершины $v \in V(G)$ мы имеем $\rho(v) = d_G(v) \geq \rho'(v)$ для любой другой раскраски ρ'. Таким образом, правильная раскраска рёбер всегда является k-оптимальной.

Лемма 5

Пусть G — связный граф, отличный от простого цикла нечетной длины. Тогда существует такая раскраска рёбер G в два цвета, что в каждой вершине степени не менее двух представлены оба цвета.

Доказательство. • Если все вершины G имеют степень 2, то G — четный цикл, для которого утверждение очевидно. Далее рассмотрим другие случаи.

• Если в графе есть вершины нечетной степени, то добавим новую вершину w и соединим её со всеми вершинами нечетной степени графа G. Получится граф $\tilde{G}$, степени всех вершин которого четны. Если все степени вершин графа G четны, положим $\tilde{G} = G$.

• Если в графе G есть вершины нечетной степени, то положим $a = w$. Если в графе G все вершины имеют четную степень, то есть вершина степени хотя бы 4, то мы выберем в качестве a именно такую вершину.

• В графе $\tilde{G}$ есть эйлеров цикл. Начиная с вершины a, будем красить ребра графа, чередуясь, в цвета 1 и 2 по ходу ЭЦ.

• Пусть $x \neq a$. При $d_G(x) \geq 2$ мы как минимум один раз прошли по ЭЦ через x. Следовательно, существуют два разноцветных ребра графа G, инцидентных x.

• Остается проверить условие для вершины a, что нужно делать только в случае, когда $a \neq w$. Тогда $d_G(a) \geq 4$ и ЭЦ хотя бы один раз прошел через a, а значит, есть два инцидентных a ребра разного цвета. □

• Отметим, что в Лемме 5 допускается наличие в графе кратных рёбер. Также оно ничем не мешает в следующей лемме.

Лемма 6

Пусть ρ — k-оптимальная раскраска ребер графа G. Предположим, что вершина w и цвета i и j таковы, что в вершине w хотя бы два раза представлен цвет i и не представлен цвет j. Пусть $H = G(E_i \cup E_j)$, а H_w — компонента графа H, содержащая вершину w. Тогда H_w — простой цикл нечетной длины.

Доказательство.

- Предположим, что H_w не является простым циклом нечетной длины.
- Построим новую раскраску ρ', отличающуюся от ρ лишь раскраской рёбер из H_w: мы раскрасим их в цвета i и j так, чтобы в каждой вершине x степени $d_{H_w}(x) \geq 2$ были представлены оба цвета i и j (это возможно по Лемме 5).
- Тогда $\rho'(w) = \rho(w) + 1$, а для любой другой вершины x, очевидно, $\rho'(x) \geq \rho(x)$. Таким образом, $\rho'(G) > \rho(G)$, противоречие с k-оптимальностью ρ. □

• Несложно понять, что $\chi'(G) \ge \Delta(G)$: все рёбра, инцидентные вершине наибольшей степени, должны быть разноцветными.

Теорема 8

(D. König, 1916.) *Пусть G — двудольный граф (возможно, с кратными рёбрами). Тогда $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Доказательство.

• Пусть $\Delta = \Delta(G)$. Рассмотрим Δ-оптимальную раскраску ρ рёбер графа G.

• Предположим, что раскраска ρ — неправильная. Тогда существует вершина v и цвет i такие, что i дважды представлен в вершине v.

• Так как $d_G(v) \le \Delta$, существует цвет j, не представленный в вершине v. Тогда по Лемме 6 в графе G есть нечетный цикл, противоречие. Следовательно, раскраска ρ — правильная. $\square$

Теорема 9

(В. Г. Визинг, 1964.) *Пусть G — граф без кратных рёбер. Тогда $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G) + 1$.*

Доказательство. **(J.-C. Fournier, 1973.)**

• Пусть $k = \Delta(G) + 1$. Достаточно доказать существование правильной раскраски рёбер G в k цветов. Рассмотрим k-оптимальную раскраску ρ рёбер G.

• Предположим, что раскраска ρ — неправильная. Тогда существует вершина u и цвет i_1, который дважды представлен в вершине u. Так как $d_G(u) < k$, то существует цвет j, не представленный в вершине u.

• Пусть $uv_1 \in E(G)$, $\rho(uv_1) = i_1$. Так как $d_G(v_1) < k$, существует цвет i_2, не представленный в v_1.

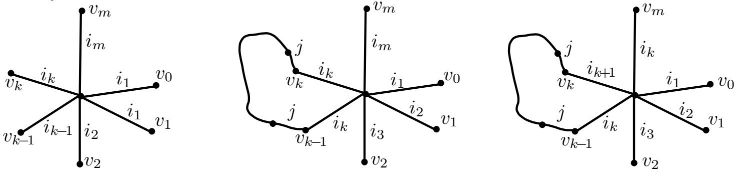
Шаг процесса построения

- Пусть $\ell \geq 1$, а цвета $i_1, \dots, i_\ell$ различны. Пусть рёбра $uv_1, \dots, uv_\ell \in E(G)$ таковы, что $\rho(uv_t) = i_t$ при $t \in [1..\ell]$, причем при $t < \ell$ цвет i_{t+1} не представлен в вершине v_t.
- Так как $d_G(v_\ell) < k$, существует цвет $i_{\ell+1}$, не представленный в вершине v_ℓ.
- Определим раскраску ρ_ℓ: $\rho_\ell(uv_s) = i_{s+1}$ при $s \in [1..\ell]$, $\rho_\ell(e) = \rho(e)$ на остальных рёбрах e.

Докажем, что $\rho_\ell(G) \geq \rho(G)$.

- Для вершины $x \notin \{u, v_1, \dots, v_\ell\}$ цвета инцидентных x рёбер не менялись, поэтому $\rho_\ell(x) = \rho(x)$.
- Рассмотрим вершину v_t, $t \in [1..\ell]$. Цвет i_{t+1} не представлен в вершине v_t в раскраске ρ, но представлен в раскраске ρ_ℓ. Цвет i_t представлен в раскраске ρ и, возможно, не представлен в раскраске ρ_ℓ. Все ребра, кроме uv_t не изменили цвета, поэтому $\rho_\ell(v_t) \geq \rho(v_t)$.
- Рассмотрим вершину u. В результате перекрашивания рёбер $uv_1, \dots, uv_\ell$ из их цветов исчез i_1 и появился $i_{\ell+1}$. Однако, цвет i_1 представлен в вершине u в раскраске ρ_ℓ: $\rho_\ell(uv_0) = i_1$. Поэтому $\rho_\ell(u) \geq \rho(u)$ и $\rho_\ell(G) \geq \rho(G)$.

• Из k-оптимальности ρ следует, что ρ_ℓ также k-оптимальна. Более того, $\rho_\ell(G) = \rho(G)$, следовательно, $\rho_\ell(u) = \rho(u)$. Это означает, что цвет $i_{\ell+1}$ представлен в вершине u в раскраске ρ, пусть $\rho(uv_{\ell+1}) = i_{\ell+1}$. Шаг завершен!

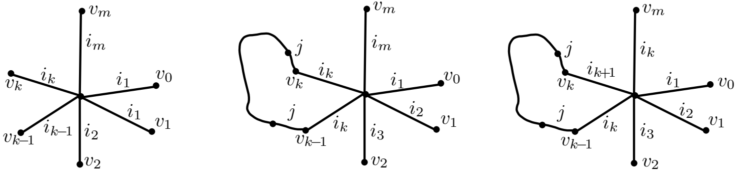


a b c

• Поскольку у вершины u конечное число соседей, на некотором шаге построения мы впервые получим $i_{m+1} = i_k$. Рассмотрим k-оптимальные раскраски ρ_{k-1} и ρ_m (мы положим $\rho_0 = \rho$). На рисунке изображены цвета рёбер, соединяющих u с $v_0, v_1, \dots, v_m$ в раскрасках ρ (рис. a), ρ_{k-1} (рис. b) и ρ_m (рис. c).

• В обеих раскрасках в вершине u дважды представлен цвет i_k: $\rho_{k-1}(uv_{k-1}) = \rho_{k-1}(uv_k) = i_k$, $\rho_m(uv_m) = \rho_m(uv_{k-1}) = i_k$.

• Пусть E_s — множество всех ребер цвета s в раскраске ρ_{k-1}, а E'_s — множество всех ребер цвета s в раскраске ρ_m, $H = G(E_{i_k} \cup E_j)$ и $H' = G(E'_{i_k} \cup E'_j)$.



a b c

• По Лемме 6 из оптимальности раскрасок ρ_{k-1} и ρ_m следует, что содержащие вершину u компоненты связности графов H и H' — простые циклы нечетной длины.

• Тогда $d_H(v_k) = 2$: из v_k выходит ребро uv_k цвета $\rho_{k-1}(uv_k) = i_k$ и ребро цвета j. Для всех рёбер e цикла H, кроме uv_k мы имеем $\rho_{k-1}(e) = \rho_m(e)$, поэтому $d_{H'}(v_k) = d_H(v_k) - 1 = 1$.

• Очевидно, v_k и u лежат в одной компоненте связности графа H', которая должна быть НЦ. Противоречие.

• Полученное противоречие показывает, что ρ — искомая правильная раскраска рёбер графа G в $\Delta(G) + 1$ цвет. $\square$

Списочные раскраски

- *Списочные раскраски* (list colorings) впервые были определены Визингом в 1976 году (он их назвал *предписанными раскрасками*).
- Каждой вершине графа $v \in V(G)$ ставится в соответствие *список* $L(v)$, после чего рассматривается правильная раскраска вершин с дополнительным ограничением: каждая вершина v должна быть покрашена в цвет из списка $L(v)$.
- Минимальное такое $k \in \mathbb{N}$, что для любых списков из k цветов существует правильная раскраска вершин графа G, обозначается через $\mathrm{ch}(G)$ (и носит название *списочное хроматическое число*, по-английски — *choice number*).
- Во всех случаях, когда речь идет о списках цветов, мы будем обозначать список большой буквой (как правило, L), а его *размер* — соответствующей строчной: так, $\ell(v) = |L(v)|$.
- Очевидно, $\mathrm{ch}(G) \geq \chi(G)$. Существуют графы, для которых $\mathrm{ch}(G) > \chi(G)$.

Списочные раскраски рёбер

• Аналогично списочным раскраскам вершин можно определить списочные раскраски рёбер и списочный хроматический индекс $\mathrm{ch}'(G)$.

• Очевидно, $\mathrm{ch}'(G) \geq \chi'(G)$. В отличие от ситуации со списочными раскрасками вершин, не известно ни одного графа, для которого $\mathrm{ch}'(G) > \chi'(G)$.

• Более того, выдвинута гипотеза (*List Color Conjecture*) о том, что $\mathrm{ch}'(G) = \chi'(G)$ для любого графа G. В 1995 году Гэльвин доказал эту гипотезу для двудольных графов.

K-редуцируемые графы

Определение

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Граф G называется *k-редуцируемым*, если его вершины можно занумеровать $v_1, \dots, v_n$ так, что каждая вершина смежна менее чем с k вершинами с бОльшим номером.

Лемма 7

Пусть G — k-редуцируемый граф. Тогда $\chi(G) \le \mathrm{ch}(G) \le k$.

Доказательство.

Пусть $v_1, \dots, v_n$ — нумерация вершин графа из определения, причем каждой вершине v_i соответствует список $L(v_i)$ длины $\ell(v_i) \ge k$. Покрасим вершины в порядке, обратном нумерации. При покраске вершины v_i количество запретов на цвет не превосходит количество ее соседей среди вершин с бОльшим номером, а таких не более $k - 1$. Значит, мы можем покрасить вершину v_i в цвет из ее списка.

• Докажем критерий k-редуцируемости графа.

Лемма 8

Граф G является k-редуцируемым, если и только если для любого его подграфа H выполняется $\delta(H) \leq k-1$.

Доказательство.

$\Rightarrow$. Пронумеруем вершины графа G как в определении. Предположим противное, пусть подграф H таков, что $\delta(H) \geq k$. Пусть $v_i \in V(H)$ — вершина с наименьшим номером. Тогда v_i смежна не менее чем с $d_H(v_i) \geq \delta(v_i) \geq k$ вершинами с бОльшим номером, противоречие.

$\Leftarrow$. Пусть v_1 — вершина графа G наименьшей степени. Тогда она смежна не более чем с $d_G(v_1) = \delta(G) \leq k-1$ вершинами.

Предположим, что вершины $v_1, \dots, v_{i-1}$ уже построены. Положим $G_i = G - \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$. Тогда граф G_i имеет вершину степени не более $\delta(G_i) \leq k-1$ — именно она и будет вершиной v_i. $\square$