

# Теория графов. Глава 4. Связность.

Д. В. Карпов

8-15.10.2020

## Точки сочленения и блоки в связном графе

В этом разделе  $G$  — связный граф.

### Определение

1) Вершина  $a \in V(G)$  называется *точкой сочленения*, если граф  $G - a$  несвязен.

2) *Блоком* называется любой максимальный по включению подграф графа  $G$ , не имеющий точек сочленения.

- В силу максимальной, блок графа  $G$  является индуцированным подграфом графа  $G$  на своем множестве вершин.
- Любой подграф без точек сочленения  $H$  графа  $G$  входит хотя бы в один блок (так как  $H$  можно дополнить до максимального подграфа без точек сочленения).

### Определение

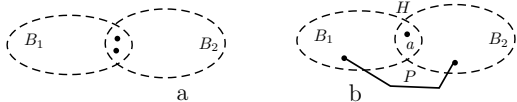
*Блоки и точки сочленения* несвязного графа — это блоки и точки сочленения его компонент.

- Далее мы будем рассматривать только связные графы.

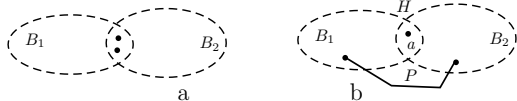
## Лемма 1

Пусть  $B_1$  и  $B_2$  — два разных блока графа  $G$ , причём  $V(B_1) \cap V(B_2) \neq \emptyset$ . Тогда  $V(B_1) \cap V(B_2)$  состоит из точки сочленения  $a$  графа  $G$ , причем  $a$  — единственная точка сочленения, отделяющая  $B_1$  от  $B_2$ .

**Доказательство.** • Пусть  $|V(B_1) \cap V(B_2)| \geq 2$ . Тогда для любой вершины  $x \in V(B_1 \cup B_2)$  граф  $B_1 \cup B_2 - x$  связан (см. рис. а). Следовательно,  $B_1 \cup B_2$  содержится в блоке  $B$  графа  $G$ , а  $B_1$  является собственным подграфом  $B$ , что противоречит максимальности  $B_1$ .



• Далее пусть  $V(B_1) \cap V(B_2) = \{a\}$ . Так как  $a$  — общая вершина блоков  $B_1$  и  $B_2$ , отделить  $B_1$  от  $B_2$  в графе  $G$  может только  $a$ .



- Если  $a$  не отделяет  $B_1$  от  $B_2$  в графе  $G$ , то в  $G - a$  есть  $V(B_1)V(B_2)$ -путь  $P$  (см. рис. b).
- Пусть  $H = B_1 \cup B_2 \cup P$ . Граф  $H - x$  связан для любой вершины  $x \in V(H)$ . Поэтому  $H$  содержится в одном блоке  $B$  графа  $G$ , а блок  $B_1$  — собственный подграф  $B$ , противоречие.
- Итак,  $a$  — единственная вершина, которая отделяет  $B_1$  от  $B_2$  в графе  $G$ . Следовательно, граф  $G - a$  несвязен, то есть  $a$  — точка сочленения  $G$ . □

- По Лемме 1 любой подграф без точек сочленения  $H$  графа  $G$  входит ровно в один блок. В частности, любое ребро графа входит ровно в один блок.
- Если у связного графа  $G$  хотя бы две вершины, то каждая его вершина смежна хотя бы с одной другой вершиной. Следовательно, любой блок графа  $G$  содержит хотя бы две вершины.

## Определение

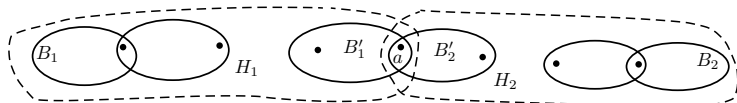
- Построим граф  $B(G)$ , вершины которого соответствуют всем точкам сочленения  $a_1, \dots, a_n$  графа  $G$  и всем его блокам  $B_1, \dots, B_m$  (мы будем обозначать эти вершины так же, как и блоки). Вершины  $a_i$  и  $B_j$  будут смежны, если  $a_i \in V(B_j)$ . Других рёбер в этом графе нет.
- Граф  $B(G)$  называется *деревом блоков и точек сочленения* графа  $G$ .

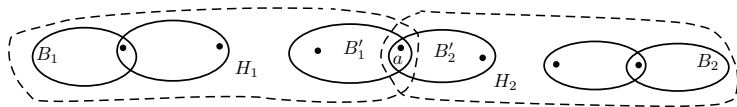
## Лемма 2

Пусть  $B_1$  и  $B_2$  — два разных блока графа  $G$ , а  $P$  — путь между ними в графе  $B(G)$ . Тогда точки сочленения графа  $G$ , отделяющие  $B_1$  от  $B_2$  — это в точности те точки сочленения, что лежат на пути  $P$ . Остальные точки сочленения не разделяют даже объединение блоков пути  $P$ .

**Доказательство.** • Пусть  $x$  — точка сочленения графа  $G$ , не лежащая на пути  $P$ , а  $H$  — объединение всех блоков пути  $P$ .

• Для любого блока  $B$  пути  $P$  граф  $B - x$  связан. Если  $B$  — не  $B_1$  и не  $B_2$ , то в нем можно пройти между двумя точками сочленения, входящими в  $P$  (эти точки отличны от  $x$ ). Поэтому  $H - x$  — связный граф.





- Пусть  $a$  — точка сочленения, лежащая на  $P$ , и она входит в блоки  $B'_1$  и  $B'_2$  пути  $P$  (см. рисунок).
- Обозначим через  $H_1$  объединение всех блоков, лежащих на пути  $P$  от  $B_1$  до  $a$ , а через  $H_2$  — объединение всех блоков, лежащих на пути  $P$  от  $a$  до  $B_2$ .
- По доказанному выше,  $a$  не разделяет ни один из графов  $H_1$  и  $H_2$ .
- С другой стороны, по Лемме 1 точка сочленения  $a$  отделяет блок  $B'_1$  от блока  $B'_2$ , а значит,  $a$  отделяет  $H_1$  от  $H_2$  и, в частности,  $B_1$  от  $B_2$ . □

## Теорема 1

1) *Дерево блоков и точек сочленения — это действительно дерево, все листья которого соответствуют блокам.*

2) *Точка сочленения  $a$  разделяет два блока  $B_1$  и  $B_2$  в графе  $G$ , если и только если  $a$  разделяет  $B_1$  и  $B_2$  в  $B(G)$ .*

Доказательство. 1)

$B(G)$  — связный граф.

- Для любых двух вершин  $B(G)$  (не важно, блоков или точек сочленения) рассмотрим путь  $Q$  в  $G$  между ними.
- Путь  $Q$  перестраивается в путь в  $B(G)$  так:
  - участок пути  $Q$ , проходящий по одному блоку графа  $G$ , заменяем на соответствующую блоку вершину в  $B(G)$ ;
  - переход  $Q$  между различными блоками по лемме 1 осуществляется через их общую точку сочленения — вершину  $B(G)$ .



- Предположим, что в  $B(G)$  есть простой цикл  $Z$  и рассмотрим подграф  $H$  — объединение всех блоков этого цикла.
- Между любыми двумя входящими в  $Z$  блоками есть два независимых пути в  $B(G)$ .
- По Лемме 2 граф  $H$  не имеет точек сочленения (они должны бы были лежать на двух путях без общих внутренних точек).
- Следовательно, существует блок  $B$ , содержащий  $H$ , а все (хотя бы два) блока цикла  $Z$  — собственные подграфы  $B$ , что невозможно.
- Таким образом,  $B(G)$  — дерево.
- Если лист  $B(G)$  соответствует точке сочленения  $a$ , то по Лемме 2 граф  $G - a$  связан, противоречие.

2) В дереве  $B(G)$  есть единственный путь между  $B_1$  и  $B_2$ . По лемме 2 в точности точки сочленения с этого пути отделяют  $B_1$  от  $B_2$  в графе  $G$ . □

### Определение

- 1) Назовем блок  $B$  *крайним*, если он соответствует висячей вершине дерева блоков и точек сочленения.
- 2) *Внутренность*  $\text{Int}(B)$  блока  $B$  — это множество всех его вершин, не являющихся точками сочленения в графе  $G$ .

- Нетрудно понять, что блок недвусвязного графа  $G$  является крайним тогда и только тогда, когда он содержит ровно одну точку сочленения.
- Внутренность некрайнего блока может быть пустой. Внутренность крайнего блока всегда непуста.
- Если у связного графа  $G$  есть точки сочленения, то он имеет хотя бы два крайних блока.
- Если  $B$  — блок графа  $G$ , а  $x \in \text{Int}(B)$ , то граф  $G - x$  связан.

### Лемма 3

Пусть  $B$  — крайний блок связного графа  $G$ , а  $G' = G - \text{Int}(B)$ . Тогда граф  $G'$  связан, а блоки  $G'$  — это все блоки  $G$ , кроме  $B$ .

#### Доказательство.

- Пусть  $a \in V(B)$  — точка сочленения, отсекающая крайний блок  $B$  от остального графа. Тогда  $\text{Int}(B)$  — это одна из компонент связности графа  $G - a$ , откуда очевидно следует связность графа  $G'$ .
- Все отличные от  $B$  блоки графа  $G$  являются подграфами  $G'$ , не имеют точек сочленения и являются максимальными подграфами  $G'$  с таким свойством (они были максимальными даже в  $G$ ). Следовательно, все они — блоки графа  $G'$ .
- Пусть  $B'$  — блок графа  $G'$ . Очевидно,  $v(G') \geq 2$ , поэтому  $B'$  содержит хотя бы одно ребро  $e$ , которое в графе  $G$  лежит в некотором блоке  $B^* \neq B$ . Теперь очевидно, что  $B^* = B'$ .

## Разрез графа $G$ по точке сочленения $a$ .

- Пусть  $U_1, \dots, U_k$  — все компоненты связности графа  $G - a$ , а  $G_i = G(U_i \cup \{a\})$ . Разрежем граф  $G$  на графы  $G_1, \dots, G_k$ .

### Лемма 4

- 1) Пусть  $b \in U_i$ . Тогда  $b$  разделяет вершины  $x, y \in U$  в  $G_i$ , если и только если  $b$  разделяет их в  $G$ .
- 2) Все точки сочленения графов  $G_1, \dots, G_k$  — это в точности все точки сочленения графа  $G$ , кроме  $a$ .

**Доказательство.** 1) • Если в  $G - b$  нет  $x$ - $y$ -пути, то его, очевидно, нет и в  $G_i - b$ .

• Наоборот, пусть  $x$  и  $y$  лежат в разных компонентах связности графа  $G_i - b$ . Не умаляя общности можно считать, что компонента связности  $W \ni x$  не содержит  $a$ . Тогда  $W$  — компонента связности графа  $G - b$ , то есть, и в этом графе нет  $x$ - $y$ -пути.

**Доказательство пункта 2 леммы 4** • Так как  $G_i - a$  — компонента графа  $G - a$ , вершина  $a$  не является точкой сочленения ни в одном из графов  $G_1, \dots, G_k$ .

- Любая другая точка сочленения графа  $G$  лежит ровно в одном из графов  $G_1, \dots, G_k$  и является в нем точкой сочленения по пункту 1.

- Также из пункта 1 следует, что других точек сочленения в графах  $G_1, \dots, G_k$  нет. □

### Алгоритм разбиения связного графа на блоки

- Выберем точку сочленения  $a$  и разрежем по ней  $G$  — заменим граф  $G$  на полученные при этом графы  $G_1, \dots, G_k$ .


- Каждым следующим шагом мы будем брать один из имеющихся графов, выбирать в нем точку сочленения и разрезать его по ней.

- И так далее, пока хотя бы один из полученных графов имеет точку сочленения.

## Теорема 2

*В результате описанного выше алгоритма разрезания графа по точкам сочленения вне зависимости от порядка действий получатся блоки графа  $G$ .*

### Доказательство.

- По Лемме 4 мы вне зависимости от порядка действий проведем разрезы по всем точкам сочленения графа  $G$  и только по ним.
- Пусть  $B$  — блок графа  $G$ . Тогда в графе  $G$  множество  $V(B)$  не было разделено ни одной из точек сочленения. Значит, по пункту 1 Леммы 4 множество  $V(B)$  не было разрезано при нашем алгоритме.
- Так как в результате алгоритма получились индуцированные подграфы графа  $G$ , один из них — скажем,  $H$  — является надграфом  $B$ .
- Если  $H \neq B$ , то рассмотрим вершину  $c \in V(H) \setminus V(B)$ . В графе  $G$  существует точка сочленения  $a$ , отделяющая  $c$  от  $V(B)$ . Тогда в силу Леммы 4 при разрезе по  $a$  вершина  $c$  была отделена от блока  $B$ , противоречие. 

## Разделяющие множества

**Определение.** Пусть  $X, Y \subset V(G)$ ,  $R \subset V(G) \cup E(G)$ .

1) Назовем множество  $R$  *разделяющим*, если граф  $G - R$  несвязен.

2) Пусть  $X \not\subset R$ ,  $Y \not\subset R$ . Будем говорить, что  $R$  *разделяет* множества  $X$  и  $Y$  (или, что то же самое, *отделяет* множества  $X$  и  $Y$  друг от друга), если никакие две вершины  $v_x \in X$  и  $v_y \in Y$  не лежат в одной компоненте связности графа  $G - R$ .

- Любой непустой граф имеет *вершинное* разделяющее множество (состоящее только из вершин).
- Любой граф более чем из одной вершины имеет *реберное* разделяющее множество (состоящее только из ребер).

**Определение.** Граф  $G$  является  *$k$ -связным*, если  $\nu(G) \geq k + 1$  и минимальное вершинное разделяющее множество в графе  $G$  содержит хотя бы  $k$  вершин.

- Блок связного графа, имеющий более двух вершин — двусвязный граф.

## Определение

1) Пусть  $x, y \in V(G)$  — несмежные вершины. Обозначим через  $\kappa_G(x, y)$  размер минимального множества  $R \subset V(G)$  такого, что  $R$  разделяет  $x$  и  $y$ . Если  $x$  и  $y$  смежны, то положим  $\kappa_G(x, y) = +\infty$ . Назовем  $\kappa_G(x, y)$  *связностью* вершин  $x$  и  $y$ .

2) Пусть  $X, Y \subset V(G)$ . Обозначим через  $\kappa_G(X, Y)$  размер минимального множества  $R \subset V(G)$  такого, что  $R$  разделяет  $X$  и  $Y$ . Если такого множества нет, то положим  $\kappa_G(X, Y) = +\infty$ .

- В  $k$ -связном графе  $G$  для любых двух множеств вершин  $X, Y \subset V(G)$  выполнено  $\kappa_G(X, Y) \geq k$ .



## Теорема Менгера

- Это, безусловно, самое известное утверждение о связности графов. Мы докажем теорему Менгера и некоторые родственные ей факты. Возможно, это не совсем справедливо, но на все эти утверждения, как правило, ссылаются одинаково — как на теорему Менгера.
- Мы докажем теорему Менгера в чуть более общей формулировке Гёринга (2000 г.).

### Теорема 3

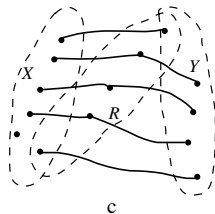
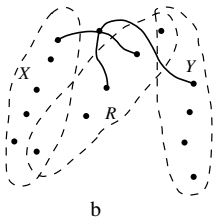
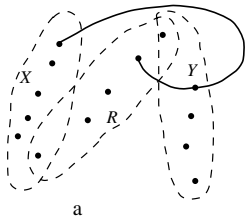
**(K. Menger, 1927.)** Пусть  $X, Y \subset V(G)$ ,  $k_G(X, Y) \geq k$ ,  $|X| \geq k$ ,  $|Y| \geq k$ . Тогда в графе  $G$  существуют  $k$  непересекающихся  $XY$ -путей.

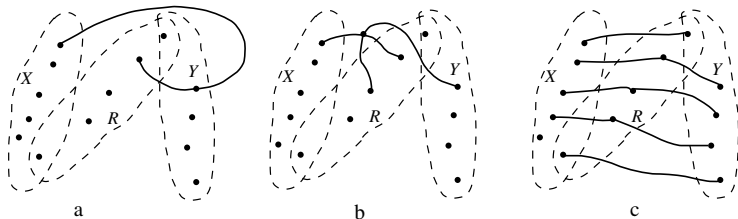
**Доказательство.** • Индукция по количеству вершин в графе. Доказывая утверждение для графа  $G$  и пары множеств  $X, Y$ , мы будем считать утверждение уже доказанным для всех меньших графов.

- Рассмотрим два случая.

## Случай 1: существует множество $R$ из $k$ вершин, разделяющее $X$ и $Y$

- Никакой  $XR$ -путь не содержит вершины из  $Y \setminus R$  (иначе существовал бы  $XY$ -путь, не содержащий ни одной вершины множества  $R$ , см. рис а).
- Следовательно, любое множество  $S$ , отделяющее  $X$  от  $R$  в графе  $G_x = G - (Y \setminus R)$ , отделяет  $X$  от  $R$  и в графе  $G$ . Но тогда  $S$  отделяет  $X$  от  $Y$  в графе  $G$ , следовательно,  $|S| \geq k$ .





- По индукционному предположению существует  $k$  непересекающихся  $XR$ -путей в графе  $G_x$ , а следовательно, и в графе  $G$ .
- Аналогично, существует  $k$  непересекающихся  $RY$ -путей в графе  $G$ .
- Никакой  $XR$ -путь не пересекает никакой  $RY$ -путь (иначе существовал бы  $XY$ -путь, не содержащий ни одной вершины множества  $R$ , см. рис. b).
- Так как  $|R| = k$ , то мы можем состыковать  $XR$ -пути и  $RY$ -пути по вершинам множества  $R$ , получив  $k$  непересекающихся  $XY$ -путей (см. рис. c).

## Случай 2: Нет множества из $k$ вершин, разделяющего $X$ и $Y$

- Случай, когда в графе  $G$  нет рёбер, очевиден.
- Далее  $E(G) \neq \emptyset$ . Пусть  $xu \in E(G)$ . Если условие теоремы выполняется в меньшем графе  $G - xu$ , то по индукционному предположению выполняется утверждение теоремы для графа  $G - xu$ , а следовательно, и для графа  $G$ .
- Остается рассмотреть случай, когда существует множество  $T \subset V(G)$ ,  $|T| \leq k - 1$ , разделяющее  $X$  и  $Y$  в графе  $G - xu$ .
- Множества  $X' = X \setminus T$  и  $Y' = Y \setminus T$  непусты. Как мы знаем,  $T^* = T \cup \{xu\}$  разделяет  $X$  и  $Y$  в графе  $G$ , а  $T_x = T \cup \{x\}$  — не разделяет (так как  $|T_x| \leq k$ ). Отсюда следует, что одно из множеств  $X'$  и  $Y'$  лежит в  $T_x$ .
- НУО  $X' \subset T_x$ . Тогда  $X' = \{x\}$ . Аналогично,  $Y' = \{y\}$ .
- Таким образом,  $T \supset X \setminus \{x\}$  и  $T \supset Y \setminus \{y\}$ .
- Учитывая  $|T| \leq k - 1$ ,  $|X| \geq k$  и  $|Y| \geq k$ , мы получаем  $X \setminus \{x\} = Y \setminus \{y\} = T$  и  $|T| = k - 1$ .
- В этом случае легко увидеть искомые пути — это ребро  $xu$  и  $k - 1$  вершина из  $T = X \cap Y$ .

- Это и есть исходная формулировка теоремы Менгера, опубликованная им в 1927 году.

## Следствие 1

Пусть вершины  $x, y \in V(G)$  несмежны,  $\kappa_G(x, y) \geq k$ .  
Тогда существует  $k$  независимых путей из  $x$  в  $y$ .

### Доказательство.

- Пусть  $X = N_G(x)$  и  $Y = N_G(y)$ .
- Так как  $x$  и  $y$  несмежны, множество  $X$  отделяет вершину  $x$  от вершины  $y$ . Значит,  $|X| \geq k$  и (аналогично)  $|Y| \geq k$ .
- Любой  $x$ - $y$ -путь идёт из  $x$  в  $X$ , далее в  $Y$  и затем в  $y$ . Поэтому, множество вершин  $R$ , отделяющее  $X$  от  $Y$ , отделяет вершину  $x$  от вершины  $y$ . Следовательно,  $|R| \geq k$ .
- По теореме 3 существует  $k$  непересекающихся  $X$ - $Y$ -путей. Значит, есть и  $k$  независимых  $x$ - $y$ -путей. □

## Следствие 2

Пусть  $x \in V(G)$ ,  $Y \subset V(G)$ ,  $x \notin Y$ ,  
 $k = \min(|Y|, \kappa_G(x, Y))$ . Тогда существуют  $k$  путей от  $x$  до  
различных вершин множества  $Y$ , не имеющих общих  
внутренних вершин.

### Доказательство.

- Пусть  $X = N_G(x)$ . Очевидно,  $|N_G(x)| \geq k$ .
- Так как  $x \notin Y$ , любое множество вершин  $R$ , отделяющее  $X$  от  $Y$ , отделяет вершину  $x$  от множества  $Y$ . Следовательно,  $|R| \geq k$ .
- Так как и  $|Y| \geq k$ , по теореме 3 существует  $k$  непересекающихся  $XY$ -путей в графе  $G$ , а следовательно, и  $k$  непересекающихся путей от  $x$  до различных вершин множества  $Y$ . □

## Теорема 4

(Н. Whitney, 1932.) Пусть  $G$  —  $k$ -связный граф. Тогда для любых двух вершин  $x, y \in V(G)$  существует  $k$  независимых  $xu$ -путей.

**Доказательство.** • Индукция по  $k$ , база для  $k = 1$  очевидна. Докажем утверждение для  $k$ -связного графа, считая, что оно доказано для графов меньшей связности.

- Если вершины  $x$  и  $y$  несмежны, то утверждение следует из следствия 2. Далее вершины  $x$  и  $y$  смежны.
- Если  $G - xy$  —  $(k - 1)$ -связный граф, то по индукционному предположению существует  $k - 1$  независимых  $xu$ -путей в графе  $G - xy$ , а еще один путь — это ребро  $xy$ .

- Пусть в  $G$  —  $xu$  существует разделяющее множество  $T$ ,  $|T| \leq k - 2$ . Так как  $T$  не является разделяющим множеством в  $G$ , легко понять, что в графе  $G - (T \cup \{xu\})$  ровно две компоненты связности:  $U_x \ni x$  и  $U_y \ni y$  (возвращение ребра  $xu$  дает связный граф  $G - T$ ).
- Пусть  $T_x = T \cup \{x\}$ . Если  $U_x \neq \{x\}$ , то  $T_x$  отделяет  $U_x \setminus \{x\}$  от  $U_y$  в  $G$ , что невозможно (так как  $|T_x| \leq k - 1$ ).
- Тогда  $U_x = \{x\}$ . Аналогично,  $U_y = \{y\}$ . Таким образом, в графе  $G$  не более  $k$  вершин: это вершины множества  $T$ ,  $x$  и  $y$ . Противоречие с определением  $k$ -связного графа. □



## Теорема

**(G. A. Dirac.)** Пусть  $k \geq 2$ . В  $k$ -связном графе для любых  $k$  вершин существует простой цикл, содержащий все эти вершины.

**Доказательство.** • Докажем теорему индукцией по  $k$ . База для  $k = 2$  следует из теоремы Уитни (Теоремы 4).

**Переход  $k - 1 \rightarrow k$ .** • Пусть  $k > 2$ . Рассмотрим  $k$ -связный граф  $G$  и его вершины  $v_1, \dots, v_{k-1}, v_k$ . Так как  $G$  является  $(k - 1)$ -связным графом, по индукционному предположению существует простой цикл  $Z$ , содержащий вершины  $v_1, \dots, v_{k-1}$ .

• Рассмотрим два случая.

**Случай 1.**  $v(Z) < k$ .

Тогда  $V(Z) = \{v_1, \dots, v_{k-1}\}$  и по Следствию 2 существуют непересекающиеся пути от  $v_k$  до всех вершин цикла  $Z$ . В этом случае легко вставить  $v_k$  в цикл  $Z$  между его соседними вершинами и получить искомый цикл.

## Случай 2. $v(Z) \geq k$ .

- По Следствию 2 существует  $k$  непересекающихся путей от  $v_k$  до цикла  $Z$ .
- Пусть  $x_1, \dots, x_k \in V(Z)$  — концы этих путей в порядке их следования по циклу (нумерация — циклическая). Они делят цикл на  $k$  дуг и внутренность одной из этих дуг.
- Одна из этих дуг (скажем, дуга  $L$  с концами  $x_i$  и  $x_{i+1}$ ) не содержит ни одной из вершин  $v_1, \dots, v_{k-1}$ . Тогда заменим дугу  $L$  на путь от  $x_i$  до  $v_k$  и путь от  $v_k$  до  $x_{i+1}$ , в результате получится искомый цикл.  $\square$