

# Теория графов. Глава 1. Простейшие понятия.

Д. В. Карпов

10-17.09.2020

## Граф. Вершины и рёбра

- Пусть  $G$  — граф. Что это такое в нашем понимании?
- $G = (V(G), E(G))$ , где  $V(G)$  — множество вершин графа  $G$ , а  $E(G)$  — множество ребер графа  $G$ .
- В нашем курсе рассматриваются только конечные графы, множества вершин и рёбер всегда конечны.
- Количество вершин графа  $G$  мы будем обозначать через  $v(G)$ , а количество ребер — через  $e(G)$ .
- Если не упоминается обратное, граф считается неориентированным, тогда каждое его ребро имеет два конца, порядок которых не имеет значения.
- Ребро  $e$  называется *петлёй*, если начало и конец  $e$  совпадают.
- Рёбра  $e$  и  $e'$  называются *кратными*, если множества их концов совпадают.

## Вершины и рёбра. Смежность и инцидентность.

- Запись  $e = xy$  будет обозначать, что вершины  $x$  и  $y$  — концы ребра  $e$ .
- В случае, когда граф не имеет кратных рёбер, концы ребра его однозначно задают. Если же кратные рёбра допустимы, возможны несколько рёбер с концами  $x$  и  $y$  и запись  $e = xy$  допускает наличие другого ребра  $e' = xy$ .
- Как правило, мы будем рассматривать графы без петель и кратных рёбер. В случаях, когда кратные рёбра или петли допускаются, об этом будет сказано.
- Про концы ребра  $e = xy$  — вершины  $x$  и  $y$  — мы будем говорить, что они *соединены ребром  $e$* .
- Соединённые ребром вершины мы будем называть *смежными*. Кроме того, мы будем называть *смежными* рёбра, имеющие общий конец. Если вершина  $x$  — конец ребра  $e$ , то мы будем говорить, что  $x$  и  $e$  *инцидентны*.

## Окрестность и степень вершины.

### Определение

Для любой вершины  $v \in V(G)$  через  $N_G(v)$  мы будем обозначать *окрестность* вершины  $v$  — множество всех вершин графа  $G$ , смежных с  $v$ .

### Определение

- 1) Для вершины  $x \in V(G)$  через  $d_G(x)$  обозначим *степень* вершины  $x$  в графе  $G$ , то есть, количество рёбер графа  $G$ , инцидентных  $x$ .
- 2) *Минимальную степень* вершины графа  $G$  обозначим через  $\delta(G)$ , а *максимальную степень* вершины графа  $G$  — через  $\Delta(G)$ .

### Лемма 1

- 1) *Сумма степеней всех вершин графа  $G$  равна  $2e(G)$ .*
- 2) *Количество вершин нечетной степени в любом графе чётно.*

Первое утверждение очевидно следует из того, что любое ребро имеет ровно два конца, а второе — из первого.

## Подграфы

### Определение

- 1) Граф  $H$  является *подграфом* графа  $G$ , если  $V(H) \subset V(G)$  и  $E(H) \subset E(G)$ .
- 2) Подграф  $H$  графа  $G$  — *остовный*, если  $V(H) = V(G)$ .
- 3) Пусть  $U \subset V(G)$ . Через  $G(U)$  мы обозначим *индуцированный подграф* на множестве вершин  $U$ . Это означает, что  $V(G(U)) = U$ , а  $E(G(U))$  состоит из всех рёбер множества  $E(G)$ , оба конца которых лежат в  $U$ .
- 4) Пусть  $F \subset E(G)$ . Через  $G(F)$  мы обозначим *индуцированный подграф* на множестве рёбер  $F$ . Это значит, что  $E(G(F)) = F$ , а  $V(G(F))$  состоит из всех вершин множества  $V(G)$ , инцидентных хотя бы одному ребру из  $F$ .
- 5) *Собственный подграф* графа  $G$  — это подграф, отличный от  $G$ .

В дальнейшем, говоря “*индуцированный подграф графа  $G$* ”, мы всегда будем подразумевать подграф, индуцированный на некотором множестве вершин

### Определение

Пусть  $G_1$  и  $G_2$  — два графа. Тогда их *объединение*  $G_1 \cup G_2$  — это граф с множеством вершин  $V(G_1) \cup V(G_2)$  и множеством рёбер  $E(G_1) \cup E(G_2)$ .

### Определение

1) Для любого множества  $R \subset E(G) \cup V(G)$  обозначим через  $G - R$  граф, полученный из  $G$  в результате удаления всех вершин и рёбер множества  $R$ , а также всех рёбер, инцидентных вершинам из  $R$ .

Для  $x \in E(G) \cup V(G)$  положим  $G - x = G - \{x\}$ .

2) Пусть  $e$  — ребро, соединяющее пару вершин из  $V(G)$ , не обязательно входящее в  $E(G)$ . Если  $e \notin E(G)$ , то через  $G + e$  мы будем обозначать граф, полученный из  $G$  в результате добавления ребра  $e$  (то есть,  $G + e = (V(G), E(G) \cup \{e\})$ ). Если  $e \in E(G)$ , то  $G + e = G$ .

## Операция стягивания ребра

- В большинстве глав мы имеем дело с графами без петель и кратных рёбер и эту операцию удобно определить следующим образом.

### Определение

Для ребра  $e \in E(G)$  через  $G \cdot e$  мы обозначим граф, полученный в результате *стягивания* ребра  $e = xy$ . Это означает, что граф  $G \cdot e$  получается из графа  $G - x - y$  добавлением новой вершины  $w$ , которая будет смежна в графе  $G \cdot e$  со всеми вершинами графа  $G$ , смежными в  $G$  хотя бы с одной из вершин  $x$  и  $y$ . Мы будем применять обозначение  $w = x \cdot y$ .

- В результате описанной операции концы  $x$  и  $y$  ребра  $e$  стягиваются в новую вершину  $w$ . При определенном таким образом стягивании ребра не возникают ни петли, ни кратные рёбра.

## Определение

1) Последовательность вершин  $a_1 a_2 \dots a_n$  и рёбер  $e_1, \dots, e_{n-1}$  графа  $G$ , где  $e_i = a_i a_{i+1}$  для всех  $i \in [1..n - 1]$ , называется *маршрутом*.

2) Мы будем говорить, что определенный выше маршрут *проходит* по рёбрам  $e_1, \dots, e_{n-1}$  и по вершинам  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

3) Маршрут называется *замкнутым*, если  $a_1 = a_n$ .

• Отметим, что вершины маршрута *не обязательно различны*. Более того, рёбра, по которым проходит маршрут, *не обязательно различны*.



## Путь

### Определение

1) *Путь* — это маршрут  $a_1 a_2 \dots a_n$ , не проходящий ни по какому ребру дважды. Кроме того, мы будем говорить, что *путь* — это подграф графа  $G$ , состоящий из вершин и рёбер, по которым этот путь проходит.

2) Вершину  $a_1$  назовём *началом*, а вершину  $a_n$  — *концом* пути.

3) Путь называется *простым*, если все вершины  $a_1, \dots, a_n$  различны.

4) *Длина* пути — это количество его рёбер.

5) Если граф  $P$  — простой путь, то его *внутренность*  $\text{Int}(P)$  — это множество всех его вершин, отличных от начала и конца этого пути. Вершины из  $\text{Int}(P)$  называются *внутренними* вершинами пути  $P$ .

• Путь у нас — это одновременно последовательность вершин, в которой все пары соседних вершин соединены ребрами, а также подграф из этих вершин и рёбер. Эта двусмысленность в дальнейшем несколько не мешает.

## ху-путь. Расстояние

- Строго говоря, путь — неориентированный граф. Но при работе с путями удобно вводить направление прохода по пути, отличать начало и конец пути друг от друга. При замене направления на противоположное путь как граф не изменяется.
- Говоря “путь от  $x$  до  $y$ ” мы будем подразумевать простой путь с началом  $x$  и концом  $y$ .

### Определение

- 1) Пусть  $x, y \in V(G)$ . Назовем *ху-путем* любой простой путь от  $x$  до  $y$ .
- 2) Пусть  $X, Y \subset V(G)$ . Назовем *XY-путем* любой простой путь с началом в множестве  $X$  и концом в множестве  $Y$ , внутренние вершины которого не принадлежат множествам  $X$  и  $Y$ .
- 3) *Расстоянием* между вершинами  $x$  и  $y$  графа  $G$  называется длина наименьшего ху-пути. Обозначение:  $\text{dist}_G(x, y)$ .

## Участки путей

- Как правило, мы будем подразумевать, что рассматриваемый путь — простой, и задавать его как последовательность вершин:  $a_1 a_2 \dots a_n$ .

### Определение

1) Если  $P$  — это путь, а  $x, y \in V(P)$ , мы будем через  $xPy$  обозначать участок пути  $P$  от вершины  $x$  до вершины  $y$ .

2) Через  $xP$  и  $Py$  мы будем обозначать участки пути  $P$  от  $x$  до конца и от начала до  $y$ , соответственно.

- Мы будем использовать введенные выше обозначения и для стыковки разных путей: так, например,  $xPyQz$  — это путь, проходящий сначала участок пути  $P$  от  $x$  до  $y$ , а затем участок пути  $Q$  от  $y$  до  $z$ .

- Как правило, мы для удобства фиксируем направление прохода пути  $P$ . На участке  $xPy$  это направление задано порядком вершин  $x$  и  $y$  и может отличаться от заданного ранее направления прохода пути  $P$ .

## Цикл

### Определение

1) *Цикл* — это последовательность вершин  $a_1 a_2 \dots a_n$  и различных рёбер  $e_1, \dots, e_n$  графа  $G$ , где  $e_i = a_i a_{i+1}$  для всех  $i \in [1..n]$  (мы считаем, что  $a_{n+1} = a_1$ ).

2) Мы будем говорить, что определенный выше цикл *проходит* по рёбрам  $e_1, \dots, e_n$  и по вершинам  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

3) Кроме того, мы будем говорить, что цикл — это подграф графа  $G$ , состоящий из вершин и рёбер, по которым этот цикл проходит.

4) Цикл называется *простым*, если все вершины  $a_1, \dots, a_n$  различны.

5) *Длина* цикла — это количество его рёбер.

• Как и в ситуации с путём, цикл — это одновременно последовательность вершин и подграф. Мы будем считать, что цикл не изменяется при циклической перестановке его вершин и при изменении их порядка на противоположный.

## Дуги и хорды

### Определение

Пусть  $C$  — простой цикл, а  $x, y$  — две его несоседние вершины.

- 1) Вершины  $x$  и  $y$  делят цикл  $C$  на два пути с концами  $x$  и  $y$ , которые мы будем называть *дугами*.
- 2) Если  $xy \in E(G)$ , назовем ребро  $xy$  *хордой* или (что то же самое) *диагональю* цикла  $C$ .

- Как правило, для удобства задано направление обхода цикла. В этом случае для обозначения дуги цикла  $C$  с началом  $x$  и концом  $y$  (то есть, от  $x$  до  $y$  по направлению обхода цикла) мы также будем применять обозначение  $xSy$ .

### Определение

*Индукцированный цикл* графа  $G$  — это простой цикл, не имеющий диагоналей.

- индуцированные циклы графа — это как раз те циклы, что являются его индуцированными подграфами.

## Лемма 2

- 1) Для любого цикла  $Z$  существует такой простой цикл  $Z'$ , что  $V(Z') \subset V(Z)$  и  $E(Z') \subset E(Z)$ .
- 2) Если в графе есть нечетный цикл, то есть и простой нечетный цикл.
- 3) Из ху-пути можно выделить простой ху-путь.

### Доказательство.

- 1) Найдем первую повторившуюся вершину  $b$  (если она есть). Участок между двумя посещениями  $b$  — искомый ПЦ.
- 2) Найдем первую повторившуюся вершину  $b$  (если она есть). Изменим порядок обхода нашего большого цикла  $Z$  в вершине  $b$ : разомкнем его на простой цикл  $Z'$  (как в пункте 1) и цикл  $Z_1$  из оставшихся ребер цикла  $Z$ . Эти циклы имеют общую вершину  $v$  и  $e(Z) = e(Z_1) + e(Z')$ , а значит, либо  $e(Z')$  нечетно (тогда цикл  $Z'$  — искомый), либо  $e(Z_1)$  нечетно, тогда продолжим рассуждения с меньшим нечетным циклом  $Z_1$ .
- 3) Аналогично.

### Лемма 3

- 1) в графе  $G$  есть простой путь длины хотя бы  $\delta(G)$ .
- 2) Если  $\delta(G) \geq 2$ , то в графе  $G$  есть простой цикл длины хотя бы  $\delta(G) + 1$ .

#### Доказательство.

1) Рассмотрим путь максимальной длины  $P = a_1 a_2 \dots a_n$  в нашем графе  $G$ . Из его последней вершины  $a_n$  выходит хотя бы  $\delta(G) - 1$  ребер в вершины, отличные от  $a_{n-1}$ . Так как путь  $P$  нельзя продлить, вершина  $a_n$  смежна только с вершинами пути  $P$ . Следовательно,  $n - 1 \geq \delta(G) - 1$ .

2) Пусть  $a_m$  — вершина наименьшего номера, смежная с  $a_n$ . Тогда в множестве  $\{a_m, \dots, a_{n-1}\}$  лежат не менее  $d_G(a_n) \geq \delta(G) \geq 2$  концов выходящих из  $a_n$  ребер. Следовательно  $a_m \neq a_{n-1}$  и мы получаем цикл  $a_m \dots a_{n-1} a_n$ , в котором не менее  $\delta(G) + 1$  вершин.  $\square$

## Компоненты связности

### Определение

1) Вершины  $a$  и  $b$  графа  $G$  называются *связанными*, если в графе существует путь между ними.

2) Граф называется *связным*, если любые две его вершины связаны.

3) Множество  $U \subset V(G)$  называется *связным*, если граф  $G(U)$  связан.

4) *Компоненты связности* графа  $G$  — максимальные наибольшие по включению связные множества вершин.

Через  $c(G)$  обозначим их количество.

5) Будем называть *компонентами* графа  $G$  подграфы, индуцированные на его компонентах связности.

- Две различные компоненты связности графа не могут пересекаться, так как иначе все вершины их объединения попарно связаны, а значит, содержатся в одной компоненте связности.

- Множество вершин графа разбито на компоненты связности.



## Определение

- 1) *Дерево* — это связный граф без циклов.
- 2) *Лес* — это граф без циклов.
- 3) Вершина  $x$  графа  $G$ , имеющая степень 1, называется *висячей вершиной* или *листом*.

- Все компоненты леса — это деревья. Таким образом, лес, как и положено, состоит из нескольких деревьев.
- Название “лист” для вершины степени 1 применяют, как правило, только в случае, когда граф — дерево.

## Лемма 4

- 1) В дереве с  $n$  вершинами ровно  $n - 1$  ребро.
- 2) У любого связного графа существует остовное дерево (то есть, остовный подграф, являющийся деревом).

## Доказательство Леммы 4

1) • Индукция по количеству вершин в дереве. База для дерева с одной вершиной очевидна.

• Рассмотрим дерево  $T$  с  $n \geq 2$  вершинами. По лемме 3 в графе, степени всех вершин которого не менее 2, есть цикл. Очевидно, у связного графа  $T$  на  $n \geq 2$  вершинах не может быть вершин степени 0. Значит, у дерева  $T$  есть висячая вершина  $a$ .

• Понятно, что граф  $T - a$  также связан и не имеет циклов, то есть, это дерево на  $n - 1$  вершинах. По индукционному предположению мы имеем  $e(T - a) = n - 2$ , откуда очевидно следует, что  $e(T) = n - 1$ .

2) • Если в графе есть цикл, то можно удалить из этого цикла ребро. Граф, очевидно, останется связным.

• Продолжим такие действия до тех пор, пока циклы не исчезнут. В результате мы получим связный граф без циклов, являющийся остовным подграфом исходного графа, то есть, остовное дерево этого графа.

## Следствие

- 1) *Дерево с более чем одной вершиной имеет не менее двух висячих вершин.*
- 2) *Для любого графа  $G$  выполнено  $e(G) \geq v(G) - c(G)$ .*

## Доказательство.


- 1) Если в дереве  $T$  не более одной висячей вершины, то остальные имеют степень хотя бы 2 и сумма степеней вершин не менее, чем  $2v(T) - 1$ . Однако, она же равна  $2e(G) = 2v(G) - 2$  по пункту 1 леммы 1, противоречие.
- 2) По лемме 1 каждая компонента графа  $G$  имеет остовное дерево, у которого рёбер ровно на одно меньше чем вершин. □

## Лемма 5

*Граф  $G$  является деревом, если и только если для любых двух вершин существует единственный простой путь, соединяющий их.*

### Доказательство.

$\Leftarrow$ . Предположим, что в графе  $G$  существует единственный простой путь между любыми двумя вершинами. Тогда граф связан. Если в графе есть цикл, то между любыми двумя вершинами цикла существуют как минимум два простых пути. Значит,  $G$  — дерево.

$\Rightarrow$ . Пусть  $G$  — дерево. Между любыми двумя его вершинами есть путь. Пусть существует два разных простых  $ab$ -пути  $P_1$  и  $P_2$ . Отрежем общие начала этих путей: предположим, что они начинаются в вершине  $s$  и их первые рёбра не совпадают. Пойдем по пути  $P_1$  до первого пересечения с  $P_2$  в вершине  $d$  (понятно, что такая вершина есть, так как у путей общий конец  $b$ ). Мы получили два простых  $cd$ -пути без общих внутренних вершин, которые образуют цикл, противоречие. 

## Определение

Пусть  $G$  — связный граф,  $a \in V(G)$ . Остовное дерево  $T$  называется *нормальным* деревом с корнем  $a$ , если для любого ребра  $xu \in E(G)$  либо  $x$  лежит на  $au$ -пути дерева  $T$ , либо  $u$  лежит на  $ax$ -пути дерева  $T$ .

## Теорема 1

Пусть  $G$  — связный граф,  $a \in V(G)$ . Тогда у графа  $G$  существует нормальное остовное дерево с корнем  $a$ .

**Доказательство.** • Индукция по  $v(G)$ . База для графов с 1 или 2 вершинами очевидна.

• Докажем переход: предположим, что для меньших чем  $G$  графов теорема уже доказана.

## Построение нормального дерева

- Пусть  $U_1, \dots, U_m$  — все компоненты связности графа  $G - a$ ,  $G_i = G(U_i)$ .
- Для каждого  $i \in [1..m]$  отметим вершину  $a_i \in U_i \cap N_G(a)$  и построим нормальное остовное дерево  $T_i$  графа  $G_i$  с корнем  $a_i$ .
- После этого соединим  $a$  с  $a_1, \dots, a_m$  и получим остовное дерево  $T$  исходного графа.
- Пусть  $xy \in E(G)$ . Если обе вершины  $x$  и  $y$  отличны от  $a$ , то они лежат в одной из компонент связности  $U_i$  (так как рёбер между разными компонентами нет), а значит, свойство для ребра  $xy$  выполнено по индукционному предположению для  $T_i$  (если, скажем,  $x$  лежит на  $a_i$ -пути по  $T_i$ , то  $x$  лежит и на  $a$ -пути по  $T$ ).
- Если же  $x = a$ , то доказываемое свойство для ребра  $xy$  очевидно. □

## Определение

- 1) *Диаметром*  $d(G)$  графа  $G$  называется наибольшее расстояние между его вершинами.
- 2) *Эксцентриситетом* вершины  $v$  называется величина  $e(v) = \max_{u \in V(G)} d(u, v)$ .
- 3) *Радиусом*  $r(G)$  графа  $G$  называется наименьший из эксцентриситетов его вершин.
- 4) *Центром* графа называется вершина, эксцентриситет которой равен радиусу графа.

## Лемма 6

$$r(G) \leq d(G) \leq 2r(G).$$

## Подвешивание графа за вершину, или дерево поиска в ширину

- Далее неоднократно будет использоваться термин “подвесить (связный) граф за вершину”. Вот что будет под этим подразумеваться.
- Одна из вершин  $a$  связного графа  $G$  объявляется *корнем* и составляет множество вершин уровня 0 (назовем его  $L_0$ ). Остальные вершины разбиваются на уровни так: в *уровень*  $L_k$  попадают все вершины, находящиеся на расстоянии  $k$  от корня  $a$ . Каждая вершина уровня  $k$  присоединяется к одной из смежных с ней вершин уровня  $k - 1$ .
- В результате получается дерево, часто бывает удобно ориентировать его рёбра от меньшего уровня к большему. Таким образом, разбиение на уровни единственно, а само дерево — нет.



## Подвешивание графа за вершину, или дерево поиска в ширину

- Количество уровней в построенном выше дереве равно  $e(a)$  — эксцентриситету вершины  $a$ .
- Наименьшее количество уровней достигается в случае, когда  $a$  — центр графа  $G$ , и равно  $r(G)$ .

### Лемма 7

*Рёбра графа  $G$  могут соединять либо вершины соседних уровней, либо одного и того же уровня.*

### Доказательство.

Пусть ребро  $xy \in E(G)$  соединяет вершину  $x \in L_k$  с  $y \in L_m$  и  $m > k$ . Тогда

$$m = \text{dist}_G(a, y) \leq \text{dist}_G(a, x) + 1 = k + 1. \quad \square$$

## Двудольные графы

### Определение

Граф называется *двудольным*, если его вершины можно разбить на два множества, внутри которых нет рёбер (эти множества называются *долями*).

- Часто бывает удобно, говоря от двудольном графе, разбивать его вершины на две *доли* — множества попарно несмежных вершин, имеющих в правильной двуцветной раскраске один и тот же цвет. Таким образом, двудольный граф  $G$  представим в виде  $(V_1(G), V_2(G), E(G))$ , где рёбра соединяют вершины из разных долей. Такое представление двудольного графа может быть не единственным.

### Теорема 2

*Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.*

## Доказательство теоремы 2

⇒. Очевидно, так как цикл нечетной длины невозможно правильным образом покрасить в два цвета.

⇐. Можно считать, что наш граф  $G$  связан, иначе докажем утверждение отдельно для каждой компоненты.

- Подвесим граф за любую вершину  $a$ , назовем полученное дерево  $T$ . Первую долю образуют вершины на нечетном расстоянии от  $a$ , а вторую — сама  $a$  и вершины на четном расстоянии от  $a$ .
- Предположим, что две смежные вершины  $x$  и  $y$  попали в одну долю. Рассмотрим простые пути  $P_x$  и  $P_y$  в дереве  $T$  от  $a$  до  $x$  и  $y$ . В дереве такие пути единственны и имеют одинаковую четность, то есть, в сумме дают четное число.
- Отрежем от  $P_x$  и  $P_y$  их общее начало (если такое есть) и получим  $x$ - $y$ -путь четной длины, который, очевидно, не содержит ребра  $xy$ . При добавлении этого ребра образуется нечетный цикл, противоречие. Таким образом, граф без нечетных циклов является двудольным.

Материалы курса можно найти вот здесь:

`logic.pdmi.ras.ru/~dvk/ITMO/`